Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 2 — 06.04.2020

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Ein lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(x, y, z)$.

Aufgabe 2

Es sei P^n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und

$$f : \begin{cases} P^n \to P^{n-1} & : n \in \mathbb{N} \\ P^0 \to P^0 & : n = 0, \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f für die Differentiation $f(p) = p'$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Untersuchen Sie die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Wie sieht das Bild und der Kern dieser Abbildung aus?

Aufgabe 3

Es sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$T(x, y, z) = (-x + 2y + z, x + y, -2x + y + z)$$

definiert ist. Geben Sie eine Basis und die Dimension des Bildes U von T an.

Aufgabe 4

Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Wie sieht die dazugehörige Matrix aus?

(b) Geben Sie die Dimension und eine Basis für das Bild von f an.

(c) Geben Sie die Dimension und eine Basis für den Kern von f an.

Hausaufgaben

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sind die folgenden lineare Abbildungen. Geben Sie die zugehörige Abbildungsmatrizen an.

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$ (b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

(a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$

(b) $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen?

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -3x + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

(b) Bestimmen Sie $\ker(F)$ und dessen Dimension.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\mathrm{Bild}(F))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S : x \to x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2}v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle x, v\rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt und $\| \cdot \|$ für die euklidische Norm.

(a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).

(b) Zeigen Sie: S ist linear.

(c) Das *dyadische Produkt* zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als die Matrix A mit den Komponenten $a_{ij} = v_i w_j,\ 1 \leq i, j \leq n$. Sei weiter $f(x) := Ax$. Zeigen Sie: $\mathrm{rg}(f) = 1$.

(d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von S. Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.

(e) Ist S ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie $\ker(S)$ und $\mathrm{Bild}(S)$!