

Aufgaben zur Veranstaltung Tutorium Mathematik, WS 2015/2016

Yvonne Nix, Jürgen Dietel, Gerrit Kiefer, Lars Klöser

FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Aufgaben - Beweismethoden

1.) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$$

2.) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{3}{4} \left(3 - \frac{3+2n}{3^n} \right), \quad \forall n \geq 1$$

3.) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$1 + 2n^2 < n^3, \quad \forall n \geq 3$$

4.) Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\prod_{k=1}^n 4^k = 2^{n(n+1)}$$

5.) Die Gleichung $2n(2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$

- Schreibe man mit Hilfe des Produktzeichens
- Beweise man für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion.

6.) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die Ungleichung

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

7.) Beweisen Sie, dass $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ die Zahl 57 als Teiler besitzt.

8.) Zeigen Sie durch vollständige Induktion :

$$(4 \cdot 7^n - 1) \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}$$

9.) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \leq \frac{n^3}{3}, \quad n \geq 2$$

10.) Beweisen Sie

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$$

11.) Zeigen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} k$$

12.) Zeigen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)(2k+3)}{k(2k-1)} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \quad n \geq 2$$