Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2021

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 2

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Geben sind die Mengen $A = [0; 5]$ und $B = [-5; 0]$ sowie folgende Abbildungen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$

Bestimmen Sie jeweils $f(0), f^{-1}(0), f(A), f^{-1}(A), f(B)$ und $f^{-1}(B)$.

Aufgabe 2

Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = < a, x >$. Zeigen Sie:

(a) f ist eine lineare Abbildung.

(b) f ist zwar surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Zeigen Sie welche der folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Wie muss ggf. der Definitionsbereich bzw. Bildbereich geändert werden, damit die Abbildung bijektiv wird?

(a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - x - 2$

(b) $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ x-2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Wir betrachten $\mathcal{C}[0,1]$, die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

(a) Zeigen Sie: Die Auswertung einer stetigen Funktion in einem festen Punkt $a \in [0,1]$, d.h die Abbildung

$$\varphi_a : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_a(f) = f(a)$$

ist linear.

(b) Ist φ_a injektiv und surjektiv?

Aufgabe 6

Bilden die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Vektorräume?

(a) $M = \{a \in \mathbb{R}\}$ mit $a + a = a$ und $ka = a, k \in \mathbb{R}$

(b) $M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\}$

mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

(c) $M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation

(d) $M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$

mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}, \ k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$