Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2021

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 8 — 17.05.2021

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie $\det(A)$ nach dem Entwicklungssatz von Laplace.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ sowohl nach dem Entwicklungssatz von Laplace als auch mit der Sarrus-Regel und vergleichen Sie den Rechenaufwand

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & 8 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie $\det(B)$ mit dem Entwicklungssatz von Laplace

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie $\det(A)$ nach einem möglichst geeigneten Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Determinante der folgenden $(n \times n)$-Matrix A mit den Elementen

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot min(i,j), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Schreiben Sie zunächst die Matrix für $n = 5$ hin.

Hinweis zur Berechnung: Es sind Spalten geeignet zu addieren.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) mit der Regel von Sarrus

(b) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

(c) mit dem Entwicklungssatz

Aufgabe 6

Eine spezielle $n \times n$-Tridiagonalmatrix T_n ist gegeben durch:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i = j-1 \text{ oder } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie die Matrix für $n = 5$ explizit auf.

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinanten $D_n = \det(T_n)$ gilt:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \text{ mit } D_0 = 1.$$

(c) Berechnen Sie D_n mit Teil b) für $n = 2, 3, 4, 5$. Geben Sie eine explizite (nicht rekursive) Formel für D_n an und beweisen Sie sie.

Aufgabe 7

Es seien 3 Punkte mit den Koordinaten (x_i, y_i) gegeben; es ist zu zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Kreises, der durch die 3 Punkte geht (Umkreis), ist, falls

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Was bedeutet die Bedingung geometrisch?

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Determinante der beiden folgenden Matrizen nach einer beliebigen Methode. Es gibt in beiden Fällen eine sehr schnelle Methode.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$