Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2021/2022

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 11

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das Tupel (f_0, f_1, f_2), gegeben durch

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = (x - x_0), \quad f_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

eine Basis im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 bilden.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom möglichst niedrigen Grades, das an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A = (-2/3), \quad B = (-1/2), \quad C = (2/5).$$

Stellen Sie das Polynom auch in seiner Faktorzerlegung dar.

Aufgabe 3

Es seien $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ Polynome aus dem Raum P_2 mit $b_i, a_i \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ ein Skalarprodukt auf P_2 definiert ist.

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

  (a) $p(x) = -1 + 5x + 2x^2$ und $q(x) = 2 + 4x - 9x^2$

  (b) $p(x) = x - x^2$ und $q(x) = 7 + 3x + 3x^2$

Tipp: Der Winkel ist wie bei den Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei das hier gegebene Skalarprodukt und die Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zu verwenden sind.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit der Projektionsformel $p = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$ im unitären Raum $\mathbb{C}^2$ die Projektion von $x = (1 + i; 2 + i)^\top$ auf $y = (1 - i; -1)^\top$.

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2021/2022
FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 11 16.12.2021

Hausaufgaben (Abgabe bis 05.01.2022)

1. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Ergänzen Sie einen dritten Vektor, so dass die 3 Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

   a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.

   b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

   a) Geben Sie eine Basis des Untervektorraums U an.

   b) Ergänzen Sie diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

4. Gegeben sei $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in P_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(x)$ bezüglich der Basis $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionensysteme auf lineare Unabhängigkeit, wobei die Definitionsmenge immer $\mathbb{R}$ ist:

   a) $\{x,\, e^{-x},\, xe^{-x}\}$

   b) $\{2,\, \sin^2 x,\, \cos^2 x\}$