Dr. Thomas Eifert, Yvonne Albrecht M.Sc. FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 13 13.01.2022

Wiederholung Kapitel 3 - Konvergenz von Folgen, Reihen, Funktionen

1. Untersuchen Sie die gegebene Folge auf Konvergenz ($n \in \mathbb{N}_0$):
$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \quad \text{mit} \quad a_0 = 1$$

2. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie mittels Abschätzen eine konvergente Majorante oder divergente Minorante finden.

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3 - 4k^2 + 3k + 42}{7 - 12k + 3k^2 + 7k^4}$
   b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2(k) + 4k^3 - 5k + 9}{\sqrt{k} + 4k^5 - \sin(k^2)}$

3. Folgende Reihen sind auf Konvergenz zu untersuchen.

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)^k}{k^k \cdot 10^k}$
   b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5 - 3k \cdot \sin(3k)}{k^3 - \cos(k)}$
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{k^2 - 3k + 1}{2k^2 + k + 1}$

4. **(Präsentation der Lösung)** Entwickeln Sie $\displaystyle f(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad (x \neq -1)$

   a) nach Potenzen von x
   b) nach Potenzen von $(x-3)$

   und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzbereich.

5. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig ergänzbar sind:

   a)
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x < -1 \\ 4x - 1 & \text{für } x > -1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad x_0 = -1$$

   b)
$$f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{und} \qquad x_0 = 0$$

   c)
$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \qquad \text{und} \qquad x_0 = 1$$