Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2022

Matthias Grajewski, Ruth Schöbel, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 5 - Repetitorium — 19.04.2022

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bilden die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Vektorräume?

(a) $M = \{a \in \mathbb{R}\}$ mit $a + a = a$ und $ka = a, k \in \mathbb{R}$

(b) $M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\}$

mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

(c) $M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation

(d) $M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$

mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}, k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Funktionen sind linear abhängig bzw. linear unabhängig?

(a) $f_1(x) = 3 + 2x + x^2,\ f_2(x) = -2 + x + x^2,\ f_3(x) = -7 + x^2$

(b) $f_1(x) = 1 + 2x + x^2,\ f_2(x) = -3 + 5x + 4x^2,\ f_3(x) = -2 + 8x + 5x^2$

Aufgabe 3

Weisen sie nach, ob es sich bei den angegebenen Abbildungen $< x, y >: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um Skalarprodukte handelt?

(a) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_1$

(b) $< x, y >= \sum_{i=1}^{3} e^{x_i y_i}$

(c) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

(d) $< x, y >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Geben sind die folgenden Abbildungen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$

sowie die Mengen$A = [0; 5]$ und $B = [-5; 0]$.
Bestimmen Sie jeweils $f(0), f^{-1}(0), f(A), f^{-1}(A), f(B), f^{-1}(B)$.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

Aufgabe 6

A sei eine 3×3-Matrix.

(a) Welche Beziehung ($=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$) besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und von A^3)?

(b) Was gilt für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrizen, falls diese existieren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 13 & 11 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 18 & 2 & 18 & 12 & 2 & 7 \\ 1 & 10 & 13 & 21 & 8 & 24 & 16 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 13 & 2 & 24 & 17 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$