FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur **Lineare Algebra 2**, SS 2016, am 14.07.2016
keine Hilfsmittel

Name: __________

Vorname: __________

Matr.-Nr.: __________

Unterschrift: __________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{10} \\ \pi & 0 & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{10} \\ \pi & 0 & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{pmatrix} = 1$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie das von dem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & (\gamma - 2)x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ & & 2x_2 & & & - & 4x_4 & = & 2 \end{array}$$

a) Für welche γ existiert eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung.

Ergebnis: Für $\gamma \neq 2$ ist die Lösung mit

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eindeutig.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $\gamma = 2$.

Ergebnis: (auch andere Vektoren denkbar)

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3

Sei

$$D = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix positiv definit ist.

   Ergebnis: für $c > 2 + \sqrt{5}$

b) Zeigen Sie, dass es kein $c \in \mathbb{R}$ gibt, für das D negativ definit ist.

   keine Angabe

Aufgabe 4

Badmintonbälle verschiedener Hersteller wurden auf ihre Haltbarkeit getestet. Verglichen wurden Preis und Anzahl der Spiele, die ein Turnierspieler mit einem Ball bestreiten kann. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle:

	Adas	Buma	Dlop	Had
Preis (x_i) in EUR	2	3	5	6
Anzahl Spiele (y_i)	1,5	2,5	4	4

Ermitteln Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die unbekannten Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ der Ausgleichsgeraden

$$y_i = a + bx_i.$$

Beginnen Sie, indem Sie zunächst das gesamte Gleichungssystem aufstellen.

Ergebnis: $a = \frac{2}{5} \wedge b = \frac{13}{20}$

Aufgabe 5

a) Definieren Sie die Linearität einer Abbildung.

b) Definieren Sie das Bild, den Kern und den Rang einer linearen Abbildung.

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei die *Spur* von A festgelegt durch

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, .$$

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $tr : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, A \to tr(A)$ ist linear.

zu a) - c) keine Angabe

d) Bestimmen Sie $rg(tr)$ und $\dim(ker(tr))$.

Ergebnis: $rg(tr) = 1, dim(ker(tr)) = n^2 - 1$

Aufgabe 6

In einem Seegebiet werden im Wesentlichen nur zwei unterschiedliche Strömungen beobachtet. Die Richtungen dieser Strömungen

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden das von den Meeresbiologen genutzte Koordinatensystem B, wobei die Länge der Vektoren die Geschwindigkeit der Strömungen (in km pro Stunde) angibt.
Der Zoll, der in dem Gebiet patroulliert, benutzt dagegen ein einfaches kanonisches Koordinatensystem K mit gleichem Ursprung.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von K nach B.

Ergebnis:

$$T_B^K = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Welche Koordinaten in B hat eine Markierung, die in K die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat?

Ergebnis:

$$K_B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c) An welcher Stelle in K befindet sich eine Gummiente, die zunächst 2 Stunden in Richtung b_1 und anschließend nach einem Strömungswechsel 3 Stunden in Richtung b_2 getrieben wurde?

Ergebnis: Die Ente befindet sich an der Stelle

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Ergebnis: (Eigenvektoren müssen nicht normiert sein)

$$\lambda_1 = 1 \; mit \; v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2 \; mit \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Diagonalisieren Sie A.

Ergebnis:

$$A = QDQ^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie A^k allgemein.

Ergebnis:

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^k & 1-2^k \\ 1-2^k & 1+2^k \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots .$$

Ergebnis:

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e+e^2 & e-e^2 \\ e-e^2 & e+e^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

a) Definieren Sie die Begriffe Eigenwert einer Matrix sowie algebraische und geometrische Vielfachheit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $\bar{A} = A^T$ gilt; hierbei bedeutet $\bar{A}$ die (elementweise) komplexe Konjugation. Seien nun $z \in \mathbb{C}^n$ und A hermitesch.

b) Zeigen Sie: $\langle z, Az\rangle \in \mathbb{R}$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ steht, d.h.

$$\langle a, b\rangle = a^T \cdot \bar{b}.$$

c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sein müssen.

keine Angabe