**Aufgaben zur Veranstaltung**
**Lineare Algebra 1, WS 2022/23**

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki Aachen

# Übungsblatt 11 14.12.2022

## Selbstlernaufgaben

### Aufgabe 1

Es seien $x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{-\sqrt{5}}\right)^T$ und $y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)^T$. Zeigen Sie, dass $x$ und $y$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ orthogonal sind, bezüglich des Standardskalarprodukts aber nicht.

### Aufgabe 2

Berechnen Sie die Standardnorm des Vektors $h$ aus dem Vektorraum $P_2$ der Polynome vom Grad $\leq 2$ bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)dx$$

mit $h(x) = 4x^2 + 6x + 3$.

### Aufgabe 3

Es seien $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ Polynome aus dem Raum $P_2$ mit $b_i, a_i \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ ein Skalarprodukt auf $P_2$ definiert ist.

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

$$p(x) = -1 + 5x + 2x^2 \quad \text{und} \quad q(x) = 2 + 4x - 9x^2$$

*Tipp:* Der Winkel ist wie bei den Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei das hier gegebene Skalarprodukt und die Norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zu verwenden sind.

### Aufgabe 4

$p$ und $q$ seien reelle Polynome vom Grad $\leq 2$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{2} p(x_k) \cdot q(x_k)$$

wobei $x_0, x_1, x_2$ paarweise verschiedene reelle Zahlen sind, ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $P_2$ der reellen Polynome vom Grad $\leq 2$ gegeben ist.

*Beispiel:* $p = 5x + 2$, $q = x^2 + 3$; wähle $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
$\Rightarrow \langle p, q\rangle = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 12 \cdot 7 = 118$

## Hausaufgaben

### Aufgabe 5

Schauen Sie sich folgende Videoausschnitte zu Kapitel 3 des Skriptes, welche Sie im Ilias unter "Vorlesungsvideos → Kapitel 3 - Algebraische Strukturen" finden, an:

- Kap_3.7_Teil2.mp4
- Kap_3.7_Teil3.mp4

Bearbeiten Sie dazu das Ilias-Quiz für diese Woche!

### Aufgabe 6

Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den gegebenen Abbildungen um eine Norm für Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ handelt.

(a)
$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(b)
$$||x|| = \left| \prod_{i=1}^{n} x_i \right|$$

(c)
$$||x|| = \min_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

### Aufgabe 7

Bestimmen Sie mit der Projektionsformel $p = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$ im unitären Raum $\mathbb{C}^2$ die Projektion von $x = (1+i; 2+i)^T$ auf $y = (1-i; -1)^T$.

### Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.