Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 1 20./21.03.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist die Abbildung
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = |x|$$
sowie die Mengen $A = [-1; 1[$ und $B =]-1; 1]$. Bestimmen Sie $f(1)$, $f^{-1}(\{1\})$, $f(A)$ und $f^{-1}(B)$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Mengen
$$A = \{\text{Vater, Mutter, Sohn, Tochter}\}, \quad B = \{1948, 1976, 1950, 1978\}$$
sowie die Abbildung
$$f : A \ni x \to f(x) = \text{Jahrgang von } x \in B.$$
Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen die Abbildungsvorschrift f erfüllen und ob die Abbildungen injektiv, surjektiv sowie bijektiv sind.

(a) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn hat Jahrgang 1976, Tochter hat Jahrgang 1978

(b) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn hat Jahrgang 1975, Tochter hat Jahrgang 1978

(c) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn und Tochter haben Jahrgang 1978

Aufgabe 3

Selbstlernphase Lesen und verstehen Sie die Beweise in **Bemerkung 4.5** und **4.6** im Skript. Beweisen oder Wiederlegen Sie anschließend die folgenden Aussagen.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt f invertierbar $\Rightarrow f(0) = 0$.

(b) Es ex. eine zu sich selbst inverse Abbildung $f : A \to A$. A sei ein Vektorraum.

(c) Es sei $f : A \to B$ und $g : B \to C$. f und g invertierbar. Zur Verkettung $g \circ f : A \to C$ ist die Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1}$ invers.

(d) Es sei $f, g \in \mathsf{C}[a, b]$, f und g invertierbar. Eine Linearkombination, wie in **Beispiel 3.24** definiert, von f und g ist invertierbar.

Aufgabe 4

Es sei P^n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und

$$f : \begin{cases} P^n \to P^{n-1} & : n \in \mathbb{N} \\ P^0 \to P^0 & : n = 0, \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f für die Differentiation $f(p) = p'$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Untersuchen Sie die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Wie sieht das Bild und der Kern dieser Abbildung aus?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

Aufgabe 6

(a) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = a \cdot x$. Zeigen Sie: f ist zwar surjektiv, aber nicht injektiv.

(b) Wir betrachten $\mathcal{C}[0,1]$, die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Man zeige: Die Auswertung einer stetigen Funktion in einem festen Punkt $a \in [0,1]$, d.h die Abbildung

$$\varphi_a : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_a(f) = f(a)$$

ist linear. Ist φ_a bijektiv?

(c) Der Vektorraum $\mathcal{C}^1[a,b]$ der stetig differenzierbaren Funktionen ist in den Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}[a,b]$, $a < b \in \mathbb{R}$, eingebettet durch die *Einbettung* $\varphi : \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathcal{C}[a,b], \quad \varphi(f) = f$. Man schreibt $\mathcal{C}^1[a,b] \hookrightarrow \mathcal{C}[a,b]$. Man zeige: Die Einbettung φ ist linear, injektiv, aber nicht surjektiv.
Hinweis: Was bedeutet in dieser Situation "surjektiv" konkret?

Aufgabe 7

Die Abbildung $f : A \to B$, wobei $A = \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}$ sind, sei folgendermaßen definiert:

$$f(a) = a \text{ mod } 17.$$

(a) Handelt es sich um eine lineare Abbildung?

(b) Wie lautet der Kern von f?

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung weder surjektiv noch injektiv ist.

(d) Welche Möglichkeiten gibt es, A und B zu wählen, damit die Abbildung bijektiv ist?