**Aufgaben zur Veranstaltung**
**Lineare Algebra 2, SS 2023**

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

# Übungsblatt 2 — 27./28.03.2023

## Selbstlernaufgaben

### Aufgabe 1

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$
Entscheiden Sie ob eine solche Abbildung folgende Eigenschaften erfüllen kann?

(a) $dim(Kern(f)) = 1$ und $dim(Bild(f)) = 3$

(b) $dim(Kern(f)) = 3$ und $dim(Bild(f)) = 2$

(c) $dim(Kern(f)) = 3$ und $dim(Bild(f)) = 1$

Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel an.

### Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Wie sieht die dazugehörige Matrix aus?

(b) Geben Sie die Dimension und eine Basis für das Bild von $f$ an.

(c) Geben Sie die Dimension und eine Basis für den Kern von $f$ an.

### Aufgabe 3

Ein lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ ein Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(x, y, z)$.

### Aufgabe 4

Prüfen Sie, ob die folgende Vorschrift eine lineare Abbildung definiert. Geben Sie ggfs. den Kern und das Bild an und untersuchen Sie auf Injektivität und Surjektivität.

$$f : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \text{ wobei } a_i \text{ i-ter Koeffizient des Polynoms } p.$$

## Hausaufgaben

### Aufgabe 5

Schauen Sie sich den Videoausschnitt zu Kapitel 4 des Skriptes von Satz 4.38 bis einschließlich Bemerkung 4.41 an, welchen Sie im Ilias unter " Vorlesungsvideos $\to$ Kapitel 4 - Lineare Abbildungen" finden. Der zu betrachtende Ausschnitt beginnt im Video " Kap_4.3_Teil_01 " bei Minute 10:18 und geht bis zum Ende dieses Videos.

### Aufgabe 6

Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Geben Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix an. Bestimmen Sie jeweils den Kern (auch für die nicht linearen Abbildungen).

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$ (b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 7

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck $\lambda x$ kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

(a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$

(b) $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen? Im Fall a) kann damit die Multiplikation eines Vektors mit einem Faktor als Matrixmultiplikation interpretiert werden.

### Aufgabe 8

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$

(a) Zeigen Sie: f ist linear.

(b) Bestimmen Sie den Kern($f$) und geben Sie die $dim(Ker(f))$ an.

(c) Berechnen Sie die $dim(Bild(f))$ bzw. $rg(f)$ und bestimmen Sie das $Bild(f)$.

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?