Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2023

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 3 03./04.04.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zu bestimmen ist der Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ 1 - \alpha & -1 & -2 \\ 1 - \alpha & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie den Rang mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

(b) Bestimmen Sie den Rang mit Hilfe von Determinanten.

Aufgabe 2

Versuchen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$$

aufzustellen und zeigen Sie anschließend, dass es sich um keine lineare Abbildung handelt.

Aufgabe 3

Drehungen sind lineare Abbildungen. Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Schritte die Abbildungsmatrix A_ϕ zu der linearen Abbildung f_ϕ, die einen Vektor innerhalb des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel ϕ dreht.

(a) Bestimmen Sie für
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$f_{\pi/6}(v_1)$ und $f_{\pi/6}(v_2)$, also die um $\frac{\pi}{6}$ gedrehten kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$.

(b) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix $A_{\pi/6}$ zu $f_{\pi/6}$ auf.

(c) Bestimmen Sie für
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$f_\phi(v_1)$ und $f_\phi(v_2)$, also die um einen beliebigen Winkel ϕ gedrehten kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$.

(d) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix A_ϕ zu f_ϕ auf.

Aufgabe 4

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, die Matrix A hat genau dann $rg(A) = 2$, wenn mindestens eine der Determinanten

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ ungleich 0 ist.

(b) Sei jetzt
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$$
eine Matrix mit $rg(A) = 1$.
Zeigen Sie, dann beschreiben die Punkte (a, b, c) eine Kurve mit $a = t$, $b = t^2$, $c = t^3$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie in Abhängigkeit von x

(a) den Kern

(b) die Dimension des Kerns

(c) den Rang

(d) das Bild der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatritzen auf.

(a) $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3, f(p(x)) = \int_{C=0} p(x)dx$

(b) $g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2, g(p(x)) = p'(x)$.
Im Werte und Definitionsbereich ist jeweils die Basis der Monome zu verwenden. $\int_{C=0}$ bezeichnet hier die Stammfunktion mit der Integrationskonstanten $C = 0$.

Beispiel: $p(x) = x^2 + 2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und somit $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\int_{C=0} p(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x$

(c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f?

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche werte von α ist die Abblidungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?

(b) Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α.

(c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α.