Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2023

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 4 — 11.04.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixprodukte $AB, BA, A^TB, B^TA, A^TA, AA^T$, falls sie existieren. Welche der Matrixprodukte existieren auf jeden Fall, unabhängig von der Zeilen- und Spaltenzahl von A? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2

Für eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Einzelabbildungen bekannt:

$$\begin{aligned} \Phi((1,0,0)^T) &= (-1,0)^T \\ \Phi((-1,0,1)^T) &= (3,1)^T \\ \Phi((0,2,-1)^T) &= (-2,1)^T \\ \Phi((0,2,0)^T) &= (0,2)^T \end{aligned}$$

(a) Wie viele der obigen vier Angaben benötigen Sie zur Bestimmung der Abbildungsmatrix?

(b) Bestimmen Sie mit ausreichend vielen dieser Angaben die zugehörige Abbildungsmatrix.

(c) Überprüfen Sie ggf., ob alle vier Angaben konsistent sind.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine quadratische Matrix A.

(a) Was gilt für die Matrix $A + A^T$? Stellen Sie anhand von Beispielen eine Aussage auf und beweisen Sie diese!

(b) Was gilt für die Matrix $A - A^T$? Stellen Sie anhand von Beispielen eine Aussage auf und beweisen Sie diese!

(c) Man zeige: Jede quadratische Matrix lässt sich schreiben als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix.

Hinweis: Für eine antisymmetrische Matrix A gilt $A = -A^T$

Aufgabe 4

Es sei A eine 2×2-Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie jeweils die Inverse folgender Matrizen, falls diese existiert:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie A^k für $k = 1..3$.

(b) Stellen Sie eine Vermutung auf für A^n und beweisen Sie diese.

Aufgabe 7

A sei eine 3×3-Matrix.

(a) Welche Beziehung ($=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$) besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und von A^3)?

(b) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus a) mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8

Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert durch

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung darstellt.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = A^T$. Verifizieren Sie $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(A^T A) = 0$ genau dann, wenn $A = (0)$.

(e) Man zeige weiter: $\text{Spur}(ABC) = \text{Spur}(BCA)$, aber i.a. $\text{Spur}(ABC) \neq \text{Spur}(BAC)$.