Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2023

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 5 — 17./18.04.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Sie haben Koordinaten bzgl. der Einheitsmatrix (e_1, e_2, e_3) gegeben. Geben Sie eine Matrix an, welche die gegebenen Koordinaten in Koordinaten bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

transformiert.

Aufgabe 2

Stellen Sie die Transformationsmatrizen für folgende Transformationen im $\mathbb{R}^3$ auf:

(a) Drehung um die y-Achse um den Winkel ϕ

(b) Spiegelung an der z-Achse

(c) Dehnung in x-Richtung um den Faktor 2 und Stauchung in z-Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}$

(d) Hintereinanderschaltung der Transformationen in der Reihenfolge a) bis c)

Aufgabe 3

$A = \{e_1, e_2, e_3\}$, $A' = \{a_1', a_2', a_3'\}$ und $A'' = \{a_1'', a_2'', a_3''\}$ bilden mit den kanonischen Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie

$$a_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, a_2' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, a_3' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

bzw.

$$a_1'' = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, a_2'' = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, a_3'' = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

jeweils Basen des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_A^{A'}$ sowie $T_{A'}^{A}$.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_A^{A''}$ sowie $T_{A''}^{A}$.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{A''}^{A'}$ sowie $T_{A'}^{A''}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $(1, 0, 1)$ bzgl. der Basen A' und A'' unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung benutzten Schreibweise.

Aufgabe 4

Betrachten Sie Diagramme bzgl. Basiswechsel und Abbildungsmatrizen anhand folgender Aufgaben.

(a) Gegeben Sei eine lineare Abbildung $v : A \to B$, die Elemente aus dem K-Vektorraum A auf Elemente aus dem K-Vektorraum B abbildet. In A existiert eine Basis U, in B existiert eine Basis W. Übersetzen Sie die Diagramme auf den Seiten 155, 156 und 157 auf die vorliegende Situation.

Hinweis: Die Bezeichnungen sind bewusst konträr zum Skript gewählt.

(b) Erweitern Sie das Diagramm auf der Seite 157 (mit den Bezeichnungen aus dem Skript, nicht denen aus Teil a)!) um je eine zweite Basis $\mathcal{A}_2$ bzw. $\mathcal{B}_2$ und die Abbildungsmatrizen $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{A}}, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}_2}$ und $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{A}_2}$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Es sind folgende Abbildungsmatrizen gegeben:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Matrix A_ϕ wird ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel ϕ gedreht, die Matrix B spiegelt selbigen an der x-Achse.

(a) Veranschaulichen Sie die Behauptungen am Beispiel des Vektors $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$, wobei $A = A_{\frac{\pi}{2}}$, indem Sie den Vektor selber und dessen Abbildungen $f_A(x_0) = A \cdot x_0$ und $f_B(x_0) = B \cdot x_0$ in ein Koordinatensystem einzeichnen.

(b) Zeichnen Sie auch die hintereinander geschalteten Abbildungen $f_{AB}(x_0) = A \cdot B \cdot x_0$ und $f_{BA}(x_0) = B \cdot A \cdot x_0$ von x_0.

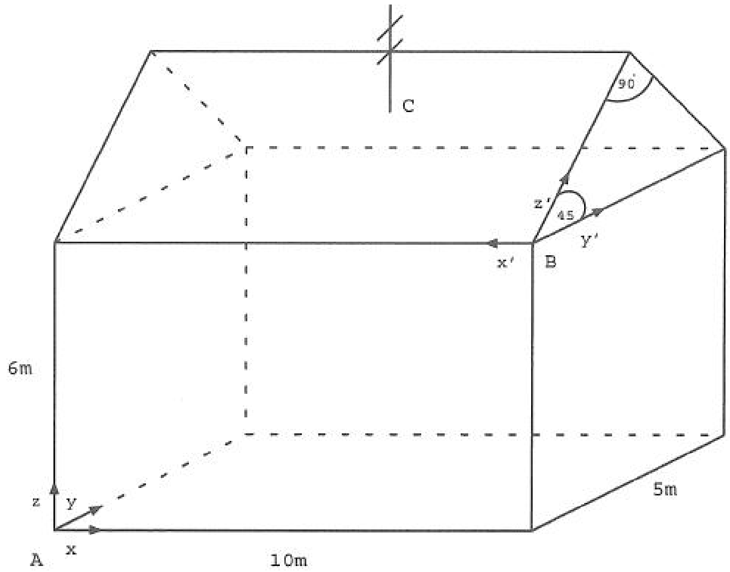
(c) Wie sehen die Umkehrabbildungen zu $f_A(x)$ und $f_B(x)$ aus? Stellen Sie dazu die Abbildungsmatrizen A^{-1} und B^{-1} auf.

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen zu den Umkehrabbildungen f_{AB}^{-1} und f_{BA}^{-1}.

(e) Verifizieren Sie die Ergebnisse aus b) und d), indem Sie die Vektoren $f_{AB}(x_0)$ und $f_{BA}(x_0)$, die Sie zeichnerisch bei b) erhalten haben mit den Matrizen aus d) multiplizieren.

Aufgabe 6

Typische IHK-Aufgabe. Ein Architekt plant, auf dem Dach eines Hauses eine Antenne anzubringen (siehe Skizze). Von seinem Bezugspunkt A aus gesehen soll sie senkrecht über der Stelle, die auf der Grundfläche des Hauses 5m nach rechts (x-Richtung) und 2m nach hinten (y-Richtung) liegt, auf dem Dach angebracht werden.



(a) Berechnen Sie den Anfangspunkt der Antenne auf dem Dach vom Bezugspunkt A aus gesehen.

(b) Der Dachdecker, der an dieser Stelle Dachziegel weglassen muss, nimmt als Bezugssystem die rechte untere Ecke des Daches B und als Basisvektoren die eingezeichneten Richtungsvektoren x', y' und z' (der Länge 1). Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C bzgl. seines Koordinatensystems.

(c) Wie lauten die Koordinaten des Bezugspunktes A des Architekten im Koordinatensystem des Dachdeckers?

(d) Wie muss die Tranformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Dachdeckers in das des Architekten umrechnet? Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie das Ergebnis von (b) in das Ergebnis von (a) umrechnen.

(e) Wie muss die Tranformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Architekten in das des Dachdeckers umrechnet?