Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2023

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 8 — 08./09.05.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) mit der Regel von Sarrus
(b) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus
(c) mit dem Entwicklungssatz

Aufgabe 2

Gegeben seien drei Matrizen A, B, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit folgenden Eigenschaften:

- A ist regulär mit $det(A) = 10$.
- Für B gilt: $det(A \cdot B) = 1$.
- Für C gilt: $B \cdot C$ ist singulär, d.h. nicht invertierbar.

Berechnen Sie:

(a) $det(C \cdot A)$
(b) $det(-A \cdot B^{-1})$
(c) $det(B \cdot C - A \cdot B^{-1} \cdot C)$
(d) $det(C + C)$

Aufgabe 3

Die Komponenten $a_{ij}, i, j = 1, ..., n$ der Matrix $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werden nach folgender Vorschrift gebildet:

$$a_{ij} = \begin{cases} i-1, \text{falls} & (i = j \vee i-1 = j) \wedge i \neq 1 \\ 1, \text{falls} & i = 1 \wedge j = n \\ 0, \text{sonst} & \end{cases}$$

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 3$. Stellen Sie A_3 auf und berechnen Sie daraus die Determinante.

(b) Stellen Sie anschließend allgemein, in Abhängigkeit von n, A_n auf und geben Sie die Determinante in Abhängigkeit von n an.

Aufgabe 4

Es seien A eine $n \times n$-Matrix und B eine $m \times m$-Matrix. Die Matrix C ist gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei C eine $((n+m) \times (n+m))$-Matrix ist, bei der die Matrix A links oben und die Matrix B rechts unten steht und die restlichen Plätze mit Nullen aufgefüllt sind. Zeigen Sie für $n = 1$ und $n = 2$, dass gilt:

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie mittels Gauß-Algorithmus die folgenden Determinanten, wobei alle Parameter ungleich Null angenommen werden dürfen:

(a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ b & 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -b & a & -a & 3 \end{vmatrix}$

Aufgabe 6

Sei $A_n = (a_{ij})$ mit $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = -1$ für $|i - j| = 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst und $D_n = det(A_n)$.

(a) Berechnen Sie D_n für $n = 1, 2, 3$ und stellen Sie eine Vermutung für D_n für größere n auf

(b) Beweisen Sie Ihre Vermutung

Aufgabe 7

Es seien 3 Punkte mit den Koordinaten (x_i, y_i) gegeben. Es gilt, dass

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Kreises ist, der durch die 3 Punkte geht (Umkreis), falls

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(a) Bestimmen Sie mithilfe dieser Gleichung den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, der durch die Punkte $(0, 0); (2, -2)$ und $(3, \sqrt{3})$ geht.

(b) Was bedeutet die Bedingung für die Gültigkeit der oben genannten Kreisgleichung geometrisch?

Hinweis: Die allgemeine Kreisgleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r lautet:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$