Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2023

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 10 — 22./23.05.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Für welche Werte von a, b, c ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} ax & + & 2y & + & z & = & 1 \\ bx & + & y & + & z & = & 0 \\ cx & + & 3y & - & z & = & 0 \end{pmatrix}$$

lösbar? Berechnen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von a, b und c. Verwenden Sie dazu die Cramersche Regel.

Aufgabe 2

Typische IHK-Aufgabe. Anna, Berta und Carla kaufen im Schmuckbedarfsgroßhandel Perlen unterschiedlicher Qualität. Es gibt drei verschiedene Sorten. Anna kauft jeweils 10 Perlen jeder Sorte und bezahlt 50 Euro. Berta nimmt auch 30 Perlen, aber nur von Sorte 1 und 2. Sie nimmt jeweils gleich viele und bezahlt 60 Euro. Carla bezahlt per Kreditkarte für ihre 60 Perlen 110 Euro. Sie wählt 25 von Sorte 1, 25 von Sorte 2 und 10 von Sorte 3. Welche Ober- und Untergrenzen für die Einzelpreise ergeben sich?

Aufgabe 3

Für welche Werte von a ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

lösbar? Bestimmen Sie die Lösung.

Aufgabe 4

Ein homogenes lineares Gleichungssystem habe die Lösungen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; weiter sei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ keine Lösung. Was kann man über die Lösungsmenge sagen (ohne sie zu berechnen!)? Wie sieht die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems aus, wenn $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Lösung des inhomogenen Systems ist?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Lösen Sie das folgende Gleichungssytem

$$\begin{pmatrix} x & + & 3y & + & 3z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{pmatrix}$$

(a) nach dem Gauß-Verfahren

(b) nach der Cramerschen Regel und

(c) durch Invertierung von der Abbildungsmatrix (siehe Hinweis).

Hinweis:
Das Gleichungssystem $Ax = b$ löst man wie folgt nach x auf:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Welchen Rang haben die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{4\times3}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times2}$ mit $n \geq 2$?

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $b_{ij} = \begin{cases} -i, & i \text{ gerade} \\ i, & i \text{ ungerade} \\ n, & i = n, j = 1 \\ n-1, & i = n, j = 2 \end{cases}$

Aufgabe 7

Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

sowie die zugehörigen LGS

$$(1)\ (a_1, a_2, a_3)x = b \text{ und } (2)\ (a_1, a_2, a_3, b)x = 0.$$

(a) Berechnen Sie $det(a_1, a_2, a_3, b)$ in Abhängigkeit von λ und bestimmen Sie den Wert λ^*, für den die Determinante Null wird.

(b) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall $\lambda = \lambda^*$.

(c) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall $\lambda \neq \lambda^*$.

(d) Für den Fall / die Fälle aus b) und c), dass unendlich viele Lösungen existieren, soll die Lösungsmenge angegeben werden.