**Aufgaben zur Veranstaltung**
**Lineare Algebra 2, SS 2023**

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki Aachen

# Übungsblatt 13 12./13.06.2023

## Selbstlernaufgaben

### Aufgabe 1

Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

### Aufgabe 2

Eine Matrix $A$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1$=1 und $\lambda_2$=2. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix $A$.

### Aufgabe 3

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & & & . & & . \\ . & & & & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 4

In einem Land haben bei der letzten Wahl $50\%$ der Wähler Partei $A$, $30\%$ Partei $B$ und $20\%$ Partei $C$ gewählt. Aus der Wahlforschung ergibt sich, dass je $10\%$ der $A$-Wähler nun $B$ und $C$ wählen, $10\%$ der $B$-Wähler $A$ und $20\%$ $C$ wählen und nur die Hälfte der $C$-Wähler treu sind, aber $30\%$ $B$ wählen wollen.

(a) Stellen Sie die Übergangsmatrix auf.

(b) Ermitteln Sie die Prozentwerte bei der nächsten Wahl.

(c) Auf welche stationäre Verteilung würde sich das Wahlergebnis einpendeln, wenn der Trend bei jeder Wahl gleich bliebe? (Berechnung mit Hilfe von Eigenwerten/-vektoren!) Sie dürfen annehmen, dass 1 ein Eigenwert der Übergangsmatrix ist.

## Hausaufgaben

### Aufgabe 5

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Lassen Sie eine KI Ihrer Wahl, z.B. ChatGPT, mehrfach die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$ berechnen.

(b) Bewerten Sie die KI-Lösungen.

(c) Kopieren Sie eine fehlerhafte KI-Antwort und markieren Sie die Fehler.

(d) Wie kann man erkennen, dass die Lösung falsch war, ohne die gesamte Lösung durchzugehen?

### Aufgabe 6

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie auch eventuelle komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Ein komplexes Gleichungssystem können Sie wie ein reelles Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen.

### Aufgabe 7

Eine Abbildung im $\mathbb{R}^2$ ist wie folgt definiert:
Ein gegebener Vektor $x$ wird zuerst um $90$ im Uhrzeigersinn gedreht und anschließend an der y-Achse gespiegelt.

(a) Das Vielfache welchen Vektors wird auf sich selbst abgebildet?

(b) Die Abbildung welchen Vektors (bzw. des Vielfachen diesen Vektors) zeigt genau in die entgegengesetzte Richtung?

(c) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix $A$ auf.

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$. Passen diese zu den Beobachtungen aus a) und b)?

### Aufgabe 8

Bei welchen Werten $a, b$ hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte?

(b) einen (doppelten) reellen Eigenwert?

(c) keinen reellen Eigenwert?