

Übungsblatt 3

18.10.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren und bestimmen Sie zu jedem der Vektoren einen Vektor, der orthogonal zu diesem ist.

(a) $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Zerlegung des Vektors $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in die Richtungen der Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$

wobei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b \perp a$, so dass $d = \alpha a + \beta b$ gilt.

Versuchen Sie auf ein lineares Gleichungssystem zu verzichten. (Zeichnerische und rechnerische Lösung!).

Aufgabe 3

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Punkte Eckpunkte eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sein können, d.h. ob zwei der Verbindungslinien gleich lang sind und einen rechten Winkel bilden.

$$P_1 = (1, 1 + \sqrt{3}), \quad P_2 = (2 + \sqrt{3}, 2), \quad P_3 = (3, 1 - \sqrt{3})$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie für die Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Ausdrücke $a \times b$ und $|a \times b|$.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $A = (a_1, a_2, 0)$ und $B = (b_1, b_2, 0)$? Geben Sie die Lösung allgemein an und berechnen Sie den Wert für $A = (3, 1, 0)$ und $B = (1, 2, 0)$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie die Graßmannsche Identität:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c.$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie $a \times b$ für die Vektoren

$$(a) \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

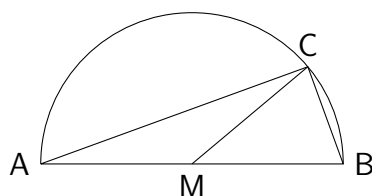
$$(b) \quad a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie außerdem $b \times a$, $-b \times a$, $a \times a$, $\langle a \times b, b \rangle$, $\langle a \times b, a \rangle$ und $(a \times b) \times b$. In welche Richtung zeigt der letzte Vektor?

Aufgabe 7

Beweisen Sie, dass jedes Dreieck A, B, C , das wie in der Skizze dargestellt konstruiert wurde, rechtwinklig ist. (Satz des Thales)

Dabei liegt der Punkt C auf dem Halbkreis über A und B .



Hinweis: Sie erkennen am Skalarprodukt zweier Vektoren ob die Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für einen Vektor a gilt für das euklidische Skalarprodukt und die euklidische Norm $\langle a, a \rangle = \|a\|^2$.

Aufgabe 8

Gegeben sind zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Vektor p als Projektion von b auf a und dann den Vektor q , die Projektion von p auf b . Berechnen Sie daraus

$$\frac{\|q\|}{\|p\|}$$

und vereinfache das Ergebnis so, dass darin nur die Vektoren a und b vorkommen.