**Aufgaben zur Veranstaltung**
**Lineare Algebra 1, WS 2023/24**

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki — Aachen

# Übungsblatt 6 — 08.11.2023

## Selbstlernaufgaben

### Aufgabe 1

Gegeben Sind die zwei Ebenen $E_1 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$ und $E_2 : a + \mu b + \lambda c$ , $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Gerade $g_1$ als Schnittmenge der Ebenen.

(b) Bestimmen Sie den Abstand von Punkt $A$ zu $g_1$. $a$ ist Ortsvektor zu $A$.

(c) Weiter sei $E_3 : a + \mu d + \lambda c$ mit $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Abstand von $E_3$ zu $E_1$.

### Aufgabe 2

**Typische IHK-Aufgabe.** Eine Mobilfunkantenne muss wegen der stürmischen Lage auf einem Berg mit Seilen stabilisiert werden. Die Spitze der Antenne hat die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die Seile werden an den Punkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befestigt.

(a) Berechnen Sie die Hessesche Normalform der Ebene, in der die Punkte $A$, $B$, $C$ liegen.

(b) Der Fuß der Mobilfunkantenne liegt in der gleichen Ebene wie die Endpunkte der Seile. Die Antenne steht genau in z-Richtung. Bestimmen Sie die Höhe der Antenne ($1$ LE $=$ $10$ m).

## Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:

(a)

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 4

Gegeben ist die Ebene

$$E : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie den kürzesten Abstand zu dem Punkt $P = (0; 0; 0)$, den entsprechenden Lotfußpunkt und den Punkt, der sich durch Spiegelung von $P$ an der Ebene ergibt.

**Hausaufgaben**

## Aufgabe 5

(a) In welchem Punkt schneidet die Gerade durch die Punkte $P = (1; 2; 1)$ und $Q = (2; 4; 3)$ die $(x_1, x_2)-$Ebene?

(b) Berechnen Sie auch den Winkel.

(c) Welche Ebene senkrecht zur Geraden verläuft durch den Nullpunkt?

(d) Wie ist der Abstand der Geraden vom Nullpunkt?

(e) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden von der Geraden $g$ mit

$$g : \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

## Aufgabe 6

Durch $4$ Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ ist ein beliebiges Viereck gegeben. Zeigen Sie: Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$, dann sind diese Strecken parallel. Fertigen Sie eine Skizze an.
(Dies gilt auch, wenn $A$, $B$, $C$ und $D$ im $\mathbb{R}^3$ liegen, die Punkte müssen dabei nicht in einer Ebene liegen.)

## Aufgabe 7

Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y + t \cdot z = 9, \quad x, y, z \in \mathbb{R}?$$

Bestimmen Sie für diese Fälle jeweils den Abstand der Geraden von der Ebene $E$.

## Aufgabe 8

**Typische IHK-Aufgabe.** Ein Flugzeug benötigt bei Gegenwind bis zum Abheben $500$ m und startet dann in Richtung $(3; 1)$. Bei Rückenwind hebt das Flugzeug erst nach $750$ m ab und startet in Richtung $(4; 1)$. Am Ende der $1$ km langen Startbahn steht ein $10$ m hoher Beleuchtungsmast. Wie groß ist der Mindestabstand des Mastes zu der Flugbahn bei Gegen- bzw. Rückenwind? (Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem.)