

Aufgaben zur Veranstaltung Lineare Algebra 2

Jaqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Sina Mattfeld

Übungsblatt 2

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Ein lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 4x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3)^\top.$$

- (a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.
- (b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $f^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

Aufgabe 2

Es sei P^n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und

$$f : \begin{cases} P^n \rightarrow P^{n-1} & : n \in \mathbb{N} \\ P^0 \rightarrow P^0 & : n = 0, \end{cases}, \quad f(p) = p'.$$

Es ist also f die Abbildung, die einem Polynom seine Ableitungsfunktion zuordnet.

- (a) Zeigen Sie: f ist linear.
- (b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.
- (c) Bestimmen Sie $\text{Bild}(f)$ und $\ker(f)$.

Aufgabe 3

Es sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Geben Sie eine Basis und die Dimension von $\text{Bild}(T)$ an.

Aufgabe 4

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ werde definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f an.
- (b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\text{Bild}(f)$.

- (c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\ker(f)$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Geben Sie die Abbildungsmatrizen der folgenden linearen Abbildungen an.

$$(a) f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad (b) f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

(a) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$

(b) $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen?

Aufgabe 7

Sei

$$F \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von F .
- (b) Bestimmen Sie $\ker(F)$ und dessen Dimension.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\text{Bild}(F))$.
- (d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

Aufgabe 8

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S : x \rightarrow x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle x, v \rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm.

- (a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).
- (b) Zeigen Sie: S ist linear.
- (c) Das *dyadische Produkt* zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als die Matrix A mit den Komponenten $a_{ij} = v_i w_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Sei weiter $f(x) := Ax$. Zeigen Sie: $\text{rg}(f) = 1$.
- (d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von S . Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.
- (e) Ist S ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie $\ker(S)$ und $\text{Bild}(S)$!