

Aufgaben zur Veranstaltung Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Sina Mattfeldt

Übungsblatt 10

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist ein **nicht** lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} xy^2 + yz^2 + zx^2 &= 1 \\ \ln(x) + x^2y + xz^2 &= 1 \end{aligned}$$

Linearisiert man um den Punkt (a) $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ bzw. (b) $(x, y, z) = (1, 1, 0)$, so ergeben sich die unterbestimmten linearen Gleichungssysteme.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 4 \end{aligned} & \text{(b)} & \begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinsten Norm der unterbestimmten linearen Gleichungssysteme.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Orthogonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie anschließend die inverse Matrix A^{-1} . Dies ist mit den speziellen Eigenschaften von A einfach. Was kann man außerdem über den Wert von $\det(A)$ sagen?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung, deren Abbildungsmatrix orthogonal ist, den Winkel zwischen Vektoren unverändert lässt. Zeigen Sie zunächst am Beispiel

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = Ax,$$

dass gilt:

$$\angle(x, y) = \angle(Ax, Ay)$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der Orthogonalmatrizen eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bildet.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Die Punkte $A(6/0/0)$, $B(2/1/3)$ und $C(-2/-2/2)$ liegen in einer Ebene E .

- (a) Stellen Sie die Hessesche Normalform der Ebene auf. Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Ursprung?
- (b) Welcher Punkt in der Ebene hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? Stellen Sie dazu das zugehörige unterbestimmte LGS auf und finden Sie die Lösung mit Hilfe der verallgemeinerten Inverse.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

Aufgabe 7

Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ innerhalb der x - z -Ebene um einen Winkel ϕ . Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ an der x -Achse.

- (a) Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.
- (b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.
- (c) Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

Aufgabe 8

- (a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2 \frac{uu^\top}{u^\top u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Hinweis: Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n .

- (b) Verifizieren Sie das Ergebnis für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.