Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 18.9.2007

1.) Eine Ebene verläuft durch die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Ebenengleichung auf. Welche der folgenden Punkte liegen in der Ebene? Begründen Sie Ihre Anwort.

$$D = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.) Zeigen Sie, dass durch die Funktion

$$\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rangle = 2u_1v_1 + 6u_2v_2 + 3u_3v_3$$

ein Skalarprodukt gegeben ist.

3.) Es seien die Funktionen f_1, f_2, f_3 auf $\mathbb{R}$ durch

$$f_1 := e^x, \quad f_2 := \sin x, \quad f_3 := x$$

definiert. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

4.) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ *keine, genau eine* oder *mehrere* Lösungen. Geben Sie gegebenenfalls sämtliche Lösungen an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha \\ 2 & 3 - \alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\alpha - 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

5.) Für Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ aus $(a, b), a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist folgende Verknüpfung definiert:

$$X \circ Y = (x_1 + y_1, x_2 \cdot y_2).$$

Bildet die Menge $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R};\ y \neq 0\}$ bezüglich der Operation $\circ$ eine Gruppe? Wie lautet das neutrale und das inverse Element?

6.) Gegeben seien zwei Punkte $P = (2, 1, 5)$ und $Q = (-1, 0, 1)$ und die Vektoren $\vec{a} = (1, -1, 3)$ und $\vec{b} = (0, 1, 2)$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch den Punkt P in Richtung von $\vec{a}$ und der Geraden g_2 durch den Punkt Q in Richtung von $\vec{b}$.

(b) Schneiden sich die beiden Geraden? Sind sie parallel? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

(c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden Geraden.

7.) In der durch $x = 0$ gegebenen (y-z-)Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt eine Wand. Darin befindet sich ein Fenster, dessen Eckpunkte die Koordinaten

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

bilden. Sonnenlicht fällt in Richtung des Vektors

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch das Fenster. Welche Eckpunkte hat der durch das Fenster verursachte Lichtfleck auf dem Boden, der in der Ebene $z = 0$ liegt.

8.) Die folgenden 3 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ stehen senkrecht aufeinander:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht.

9.) Bestimmen Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

10.) Zwei Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ heißen äquivalent ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$), falls gilt:

$$B - A = D - C$$

. Zeigen Sie, dass diese Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.