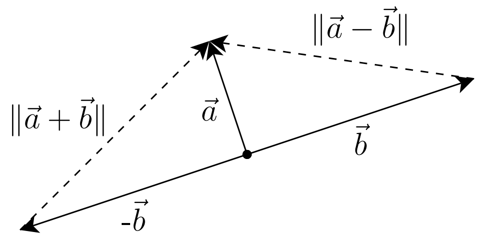
Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 22.9.2008

1.) Gegeben sind $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ Es gilt das geometrische Gesetz, dass $\vec{a}$ genau dann senkrecht zu $\vec{b}$ ist, falls $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$.



Zeigen Sie mit Hilfe des obenstehenden Gesetzes:

$\vec{a}$ ist genau dann senkrecht zu $\vec{b}$, falls $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

2.) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \oplus y := x + y - 2xy$. Ist $(\mathbb{R}, \oplus)$ eine Gruppe?

3.) Geben Sie zwei Vektoren an, die senkrecht auf dem Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sowie senkrecht aufeinander stehen. Geben Sie genau an, durch welche Überlegungen Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind.

4.) In der durch $y = 0$ gegebenen (x-z-)Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt eine Wand. Darin befindet sich ein Fenster, dessen Eckpunkte die Koordinaten

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

bilden. Sonnenlicht fällt in Richtung des Vektors

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

durch das Fenster. Welche Eckpunkte hat der durch das Fenster verursachte Lichtfleck auf dem Boden, der in der Ebene $z = 0$ liegt.

5.) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels der beiden Ebenen E_1 und E_2, wobei

- $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- E_2 gegeben ist durch die drei Punkte $P_1 = (1, 3, 2)$, $P_2 = (2, 1, 2)$, $P_3 = (4, 1, 6)$.

6.) Zeigen Sie jeweils durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ keine Skalarprodukte sind:

$$f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_2 y_2$$

$$f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_3 y_3 + x_2 y_2 + 2$$

$$f_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1 y_2 + 2 x_2 y_3$$

$$f_4(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$f_5(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1 + x_2 + x_3$$

7.) Es sei P[0,1] der reelle lineare Raum der auf dem Intervall [0,1] definierten Polynome. Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome linear abhängig sind:
$p_1(x) = x^4 - 2x^2 + x$, $p_2(x) = -3x^4 + x^2 - x$, $p_3(x) = -2x^4 - 6x^2 + 2x$

Welche Dimension hat der von diesen Polynomen aufgespannte Teilraum? (mit Erläuterung!)

8.) Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9.) Sei W die lineare Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^4$. $W^{\perp}$ ist das orthogonale Komplement zu W. Schreiben Sie $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Summe $w = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^{\perp}$.

10.) Es seien die Funktionen f_1, f_2, f_3 auf $\mathbb{R}$ durch

$$f_1 := 2^x, \quad f_2 := x, \quad f_3 := x^2$$

definiert. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.