Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 09.02.2009

1.) Ein Gebäude in Form einer Pyramide hat die Eckpunkte O(0,0,0), A(6,8,0), B(0,8,0) und die Spitze S(2,4,8).
Von der Ecke B verläuft zum Punkt P(4,6,4) ein Stahlträger.

(a) Zeigen Sie, dass P in der Ebene E_{OAS}, die die Pyramidenseite OAS enthält, liegt.

(b) Überprüfen Sie, ob der Stahlträger senkrecht auf die Ebene E_{OAS} trifft.

2.) Eine Gerade f gehe durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine zweite Gerade g gehe durch die Punkte

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden, falls ein solcher existiert.

(b) Es seien $\vec{d_f}$ und $\vec{d_g}$ die kürzesten Abstandsvektoren der jeweiligen Geraden vom Nullpunkt. Trifft $\vec{d_f}$ bzw. $\vec{d_g}$ auf den Schnittpunkt der beiden Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) (a) Definieren Sie den Begriff Gruppe!

(b) Gegeben sind die Menge $M = \{a, b\}$ und die Verknüpfung * mit:

*	a	b
a	a	b
b	b	b

Überprüfen Sie, ob es sich bei (M,*) um eine abelsche Gruppe handelt.

4.) Man zeige, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und orthonormiere sie.

5.) Man berechne die (orthogonale) Projektion von

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf die Ebene, die durch $U = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ gegeben ist.

6.) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Gibt es ein t, für das diese 3 Vektoren orthogonal zueinander werden?

7.) Man zeige, dass für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ durch

$f(x, y) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$

eine symmetrische Bilinearform gegeben ist (d.h. dass alle Axiome des Skalarprodukts abzüglich der positiven Definitheit erfüllt sind).

8.) Die Vektoren $\vec{v}_{2n}$ sind definiert durch

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{2n} = (\vec{v}_{2(n-1)} \times \vec{a}) \times \vec{a}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\vec{v_{2n}} = (-1)^n 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

9.) Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Begründen Sie bei den anderen die Nicht-Linearität.

(a) $f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(c) $f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$

(d) $f_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Geben Sie für die lineare Abbildung die zugehörige Abbildungsmatrix an und bestimmen Sie den Kern.

10.) Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen auf einem geraden Kurs. F_1 durchfliegt die Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 40 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 40 \end{pmatrix}$. F_2 durchfliegt die Punkte $C = \begin{pmatrix} 28 \\ -20 \\ 11 \end{pmatrix}$ bzw. $D = \begin{pmatrix} 25 \\ -18 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Die Koordinaten sind in Einheiten von 100 m.

Wie weit ist ein Flugzeug auf der Flugbahn von F_1 mindestens von einem Flugzeug auf der Flugbahn von F_2 entfernt?