Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 30. September 2009

1.) Der Lousberg soll durch einen Tunnel durchquerbar gemacht werden. Zwei Teams von Bauarbeitern bohren sich durch den Tunnel. Das eine Team beginnt in 80 Meter Höhe bei den x-y- Koordinaten (-30m,40m) an und gräbt sich in Richtung (1,-1,0) vor. Das zweite Team hat Probleme mit ihrer Software zur Ermittlung der richtigen Richtung. Es fängt an den x-y-z-Koordinaten (40m,-30m,140m) an zu graben. Leider kommt es von der richtigen Grabrichtung (-1,1,-2) ab und gräbt stattdessen von Beginn an in Richtung (-1,2,-2).

a) Wo hätten sich die beiden Team getroffen, wenn alles normal verlaufen wäre?

b) In welche Richtung muss das zweite Team weiter graben, damit sie den Treffpunkt noch erreichen, obwohl sie bereits 30m entlang der falschen Richtung (-1,2,-2) gegraben haben?

2.) Bestimme den Abstand des Punktes $\boldsymbol{P}(5, 10, 3)$ von der Ebene E_1, die durch den Punkt $Q_1(1, 1, 1)$ sowie der Geraden G $:\vec{x} = (4, 3, 5) + \mu(3, 0, 4)$ bestimmt wird.

3.) Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2.

g_1: Die Punkte (-1,1,1) und (1,0,1) liegen auf der Geraden.

g_2: $\vec{x} = (2,2,2) + \alpha \cdot (-1,0,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Welche Lagebeziehung haben sie zueinander?
b) Bestimmen Sie den kleinsten Abstand (der natürlich auch 0 sein kann) der beiden Geraden!

4.) Ist für p_1,$p_2 \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ Menge der Polynome über $\mathbb{R}$) durch

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} p_1(x) \cdot p_2(x) dx$$

ein Skalarprodukt definiert?

5.) Überprüfen Sie ***alle*** Eigenschaften, ob die Verknüpfung $\oplus$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ b_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ eine Gruppe bildet und begründen Sie anschließend, warum es sich um eine Gruppe handelt oder nicht.

6.) Bestimme eine Orthogonal-Basis für die lineare Hülle der Vektoren $\vec{a} = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1, 0)$ und $\vec{c} = (1, 1, 0, 0)$.

7.) Sind die drei Funktionen über $\mathbb{R}$ linear unabhängig?

a) $p_1(x) = x^2 - x + 7$

b) $p_2(x) = 3x^2 + 18$

c) $p_3(x) = x - 1$

8.) Gegeben sind die beiden Untervektorräume $U_1 = \langle (1,0,1,0), (2,3,-1,4) \rangle$ und $U_2 = \langle (1,-3,4,-3), (0,0,0,-2) \rangle$.

a) Überprüfen Sie, ob der Vektor $\vec{a} = (0,0,1,1)$ in U_1 oder in U_2 liegt.

b) Spannt der Untervektorraum, der aus der Vereinigung $U_1 \cup U_2$ der beiden Untervektorräume U_1 und U_2 entsteht den ganzen $\mathbb{R}^4$ auf?

c) Vervollständigen Sie gegebenenfalls $U_1 \cup U_2$ zu einem ***minimalen*** Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$

9.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ bilden die drei Vektoren $\vec{a_t}, \vec{b_t}$ und $\vec{c}$ ***<u>keine</u>*** Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Berechnen sie die Koordinaten von $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der drei Basisvektoren zu $t = 0$.

10.) Gegeben ist der Kegelschnitt $x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12$.

a) Um welchen Typ Kegekschnitt handelt es sich?

b) Skizzieren Sie den Kegelschnitt in einem geeigneten Koordinatensystem.

c) Welcher Typ Kegelschnitt entsteht, wenn das Vorzeichen den y^2-Terms auf „Minus“ geändert wird.