Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II 09.07.2004

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind 4 Punkte A, B, C, D und ein Vektor $\vec{n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme die Gleichung der Ebene durch die 3 Punkte A, B und C. 4

b) Man bestimme die Gleichung der Ebene durch den Punkt D senkrecht zu $\vec{n}$. 3

c) Man bestimme die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen aus a) und b) und ihren kürzesten Abstand vom Nullpunkt. 7

Aufgabe 2: Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

a) Man bestimme die Lösung für $c = 4$ und $d = 2$. 4

Für welche Werte von c und d hat das Gleichungssystem:

b) eine eindeutige Lösung, 3

c) keine Lösung, 3

d) unendlich viele Lösungen ? 4

Aufgabe 3 : Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimmen Sie daraus ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist. 13

Aufgabe 4: Gegeben sind 2 (Spalten-)Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$. und $< u, v >$ ihr Standard-Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = u \cdot v^T$ gilt

$$A^n = < u, v >^{(n-1)} \cdot A \qquad \forall\, n \,\in\, \mathbb{N}$$

13

Aufgabe 5: Gegeben ist die Menge der Matrizen

$$M = \left\{ A; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man zeige, dass M eine kommutative Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bildet. 12

Aufgabe 6: Gegeben ist die Einheitsmatrix $E \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ und die zwei Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die inverse Matrix von $E + u \cdot v^T$ gilt

$$(E + u \cdot v^T)^{-1} = E - \frac{1}{\alpha} u \cdot v^T \text{ mit } \alpha = 1 + \langle u, v \rangle.$$

9

Aufgabe 7: Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Was kann über die Lage der Eigenwerte dieser Matrix auf Grund der Eigenschaften der Matrix B (evtl. Symmetrie, Positiv-Definitheit, Orthogonalität) gesagt werden? Welche der folgenden Werte ist Eigenwert von B: 1, 1/2, 0, -1, 1+i? Ist der Vektor $(1, 0, 0, 1)$ Eigenvektor? 13

Aufgabe 8: Man bestimme die inverse Matrix von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

falls sie existiert. (Probe!) 12

Summe der Punkte: **100**