

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II

23.9.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P .

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Liegt der Punkt P auf der Geraden g ? Begründen Sie Ihre Antwort. 2
- b) Geben Sie die allgemeine Gleichung der Verbindungsgeraden zwischen P und g an. 2
- c) Wie lautet die Gleichung des Lotvektors von P auf g ? 8

Aufgabe 2 : Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des \mathbb{R}^4 auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

- a) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalbasis von U , falls dies möglich ist.
- b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement U^\perp ?

12

3

Aufgabe 3 : Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $B = A^4$ und zeige durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$B_n = A^{4n} = \begin{pmatrix} (-2i)^n & 0 \\ 0 & (-2i)^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 4 : Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 8 \\ 5 & 14 & 21 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

10

b) Welchen Wert hat die Determinante von A und welchen Rang hat die Matrix A?
(Begründung!)

3

Aufgabe 5: Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die inverse Matrix A^{-1} , falls sie existiert.

10

Aufgabe 6: Gegeben ist die $n \times n$ - Dreidiagonalmatrix A_n durch

$$a_{k,k} = a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = 1,$$

$$a_{i,k} = 0 \text{ sonst.}$$

a) Man berechne $\det(A_n)$ für $n=1,2,3,4$.

3

b) Man zeige, dass gilt

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) \quad \forall n \geq 3$$

und folgere daraus eine Beziehung zwischen $\det(A_{n+1})$ und $\det(A_{n-2})$.

10

c) Bestimmen Sie damit und mit Teil a) die Werte von $\det A_n$ für $n = 5, \dots, 10$.

3

Aufgabe 7: Man bestimme sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Vor Beginn der Rechnung sollten folgende Fragen beantwortet werden:

- i) Was folgt für die Eigenwerte aus dem Rang der Matrix A ?
- ii) Ist $\vec{x} = (1, 1, 1)^T$ ein Eigenvektor von A?

Aufgabe 8: Zwei $(n \times n)$ -Matrizen A und B heissen äquivalent ($A \sim B$), falls eine invertierbare Diagonalmatrix D existiert, die von A und B abhängt, so dass gilt $A = D \cdot B$. Man zeige, dass diese Relation \sim eine Äquivalenzrelation ist d.h. dass gilt:

$$A \sim A;$$

$$A \sim B \rightarrow B \sim A;$$

$$A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C.$$

12

Summe der Punkte:**100**