Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II 4.7.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind 2 Punkte A, B, und zwei Vektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme die Gleichungen der beiden Ebenen E_1 durch den Punkte A senkrecht zu $\vec{n_1}$ und E_2 durch den Punkt B senkrecht zu $\vec{n_2}$. 4

b) Man bestimme die Gleichung der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen. 6

c) Man bestimme den kürzesten Abstand der Schnittgeraden vom Nullpunkt. 4

Aufgabe 2 : Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Man stelle fest, ob die Vektoren linear unabhängig sind. 4

b) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist. 8

Aufgabe 3 : Gegeben ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man zeige durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & 3(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \forall \in \mathbb{N}.$$

10

Aufgabe 4 : Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Was folgt daraus für den Wert der Determinante von A? 6

b) Man bestimme eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$. 5

c) Wie lautet die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems $Ax = b$? 3

Aufgabe 5a: Unter welchen Voraussetzugen bildet die Menge der Matrizen

$$M = \{A = \begin{pmatrix} a1 & a2 \\ 0 & a3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3\}$$

eine (evtl. nicht-kommutative) Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation? 10

Aufgabe 6: Gegeben ist die $n \times n$ - Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Die Matrix A hat auf der 1. und der letzten Zeile und der Hauptdiagonalen nur Einsen bis auf das Element a_{nn}, für das gilt $a_{nn} = 0$.)
a) Man berechne $\det(A_4)$; 4
b) Man zeige, dass gilt $\det(A_n) = -1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. 9

Aufgabe 7: a) Man zeige, dass die Matrix $A = u \cdot v^T, \quad u, v \in \mathbb{R}^n$, den Eigenwert $< u, v >$ mit dem zugehörigen Eigenvektor u besitzt. 4

b) Wie groß ist $rg(A)$, falls $\vec{u} \neq \vec{0} \; \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ und was folgt daraus für einen weiteren Eigenwert der Matrix A? 4

c) Man bestimme sämtliche Eigenwerte der Matrix $A = u \cdot v^T$ für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7

Aufgabe 8: Gegeben ist die 1×2 - Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Man berechne die Matrix

$$B(x) = A^T A + x^2 E_2$$

und die inverse Matrix $B(x)^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. 6

b) Weiter bestimme man

$$A^+ = \lim_{x \to 0} (B(x)^{-1} A^T) \qquad \text{und die Matrix} \qquad AA^+.$$

6

Summe der Punkte: **100**