Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II 23.9.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Liegt der Punkt P auf der Geraden g?. Begründen Sie Ihre Antwort. 2

b) Geben Sie die allgemeine Gleichung der Verbindungsgeraden zwischen P und g an. 2

c) Wie lautet die Gleichung des Lotvektors von P auf g? 8

Aufgabe 2 : Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist. 12

b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^\perp$? 3

Aufgabe 3 : Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $B = A^4$ und zeige durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$B_n = A^{4n} = \begin{pmatrix} (-2i)^n & 0 \\ 0 & (-2i)^n \end{pmatrix} \quad \forall \in \mathbb{N}.$$

10

Aufgabe 4 : Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 8 \\ 5 & 14 & 21 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. 10

b) Welchen Wert hat die Determinante von A und welchen Rang hat die Matrix A? (Begründung!) 3

Aufgabe 5: Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die inverse Matrix A^{-1}, falls sie existiert. 10

Aufgabe 6: Gegeben ist die $n \times n$ - Dreidiagonalmatrix A_n durch

$$a_{k,k} = a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = 1,$$

$$a_{i,k} = 0 \text{ sonst.}$$

a) Man berechne $\det(A_n)$ für n=1,2,3,4. 3

b) Man zeige, dass gilt

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) \quad \forall\, n \geq 3$$

und folgere daraus eine Beziehung zwischen $\det(A_{n+1})$ und $\det(A_{n-2})$. 10

c) Bestimmen Sie damit und mit Teil a) die Werte von $\det A_n$ für $n = 5, ..., 10$. 3

Aufgabe 7: Man bestimme sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Vor Beginn der Rechnung sollten folgende Fragen beantwortet werden:
i) Was folgt für die Eigenwerte aus dem Rang der Matrix A ?
ii) Ist $\vec{x} = (1,1,1)^T$ ein Eigenvektor von A? 12

Aufgabe 8: Zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B heissen äquivalent $(A \sim B)$, falls eine invertierbare Diagonalmatrix D existiert, die von A und B abhängt, so dass gilt $A = D \cdot B$. Man zeige, dass diese Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist d.h. dass gilt:

$$A \sim A;$$

$$A \sim B \to B \sim A;$$

$$A \sim B \wedge B \sim C \to A \sim C.$$

12

Summe der Punkte: **100**