Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II 15.3.2007

1.) Bestimmen Sie a so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2+3 \\ 3a+6 \end{pmatrix}$ ein Element des Vektorraums $< \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} >$ ist .

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a^2+3 \\ 3a+6 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|c}
2 & 1 & 1 \\
11 & 5 & a^2+3 \\
3 & 2 & 3a+6 \\
\hline
2 & 1 & 1 \\
1 & 0 & a^2-2 \\
\text{-1} & 0 & \text{3a+4} \\
\hline
2 & 1 & 1 \\
1 & 0 & a^2-2 \\
0 & 0 & a^2+3a+2
\end{array}$$

Die Lösbarkeitsbedingung ist: $a^2+3a+2=0$. Nach der p-q-Formel folgt: $a_1 = -1$ und $a_2 = -2$.

2.) Berechnen Sie die Inverse zu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Führen Sie eine Probe durch.

Lösung:

$$
\begin{array}{cccc|cccc|l}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \text{—-(I)} \\
1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{—-(I)-(II)} \\
1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & \text{—-(I)-(II)-(III)} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \text{—} \div 2 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \text{—} \div 4 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -1 & 1 & \text{—} \div 8 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \\
\hline
\end{array}
$$

3.) Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung f.
$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$
f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 \\ x_3 + x_4 + x_5 \end{pmatrix}
$$

4.) Eine Matrix A besitzt die Eigenwerte λ_1=1 und λ_2=2. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie die Matrix A.

5.) Sei A= $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Stellen Sie eine Vermutung für A^n auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

6.) Ein Textilgeschäft hatte folgende Lieferungen:
Bei der ersten Lieferung wurden für 1 Hose, 1 T-Shirt, 1 Bluse und 1 Rock 230 Euro bezahlt, bei der zweiten Lieferung für 2 T-Shirts, 1 Bluse und 2 Röcke 220 Euro . Bei einer dritten Lieferung kosteten 3 Hosen, 2 T-Shirts und 1 Bluse 340 Euro.
Ermitteln Sie die allgemeine Lösungsmenge des Gleichungssystems. In welchen Grenzen kann der freie Parameter λ variieren? In welchem Bereich liegt der mögliche Preis für eine Hose?

7.) Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, die mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ haben.

Um welches geometrische Gebilde handelt es sich?

8.) Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel dafür an, dass die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen keine Gruppen sind:

- $\mathbb{Z}$ und Subtraktion
- $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ und Addition
- $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ und Multiplikation

9.) Gegeben sind folgende 4 Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuchen Sie diese Vektoren auf lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit.

(b) Bilden diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

10.) Der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ ist gegeben durch

$$P_n = \{p; p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ , \ a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$$

Ferner sei

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$$

ein Skalarprodukt auf P_n gegeben ist.