Klausur zur Linearen Algebra

Jansen + Pflug, 13.07.2007

Zeit: 120 Minuten, 10 P. pro Aufgabe

---

1. $\langle u, v \rangle$ bezeichne das Standard-Skalarprodukt zu 2 Spaltenvektoren $u, v \in \mathbb{R}^m$.

   (a) Begründen Sie kurz, wieso $\langle u, v \rangle = u^T v = v^T u$ gilt.

   (b) Berechnen Sie für u= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und v= $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Skalarprodukt.

   (c) Berechnen Sie $A = uv^T$.

   (d) Zeigen Sie allgemein, dass für $A = uv^T$ gilt: $A^2 = \langle u, v \rangle A$.

   (e) Beweisen Sie allgemein, dass für eine Matrix $A = uv^T$, wobei u und v beliebige m-dimensionale Vektoren sind, gilt:

   $$A^n = \langle u, v \rangle^{n-1} A, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (Hinweis: nicht elementweise ausmultiplizieren, sondern 'geschickt klammern')

2. Bestimmen Sie die reellen Zahlen a, für die das lineare Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & a & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   - genau eine Lösung
   - keine Lösung

   besitzt. Geben Sie auch die Lösungsmengen an.
   Begründen Sie, warum es nicht unendlich viele Lösungen geben kann.

3. Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

   $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

   parallel zur Ebene

   $$E : 2x - \sqrt{5}y + tz = 10 \, ; \, x, y, z \in \mathbb{R}$$

   Bestimmen Sie für diese Fälle jeweils den Abstand der Geraden von der Ebene E.

4. (a) Wann ist eine quadratische Matrix orthogonal?

(b) Weisen Sie nach, dass folgende Matrix orthogonal ist:

$$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi)cos(\vartheta) & sin(\varphi)sin(\vartheta) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi)cos(\vartheta) & -cos(\varphi)sin(\vartheta) \\ 0 & sin(\vartheta) & cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der quadratischen Orthogonalmatrizen O(n) abgeschlossen bezüglich der Matrix-Multiplikation ist.

5. Man löse das überbestimmte Gleichungssystem nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$-2x + y = 3$$

$$x - 2y = 4$$

$$2x + 2y = 2$$

6. Weisen Sie nach, dass folgende Matrizen nur reelle Eigenwerte besitzen:

(a) $\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$, mit $a, c, d \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix}$, $i^2 = -1; a, b, c, d \in \mathbb{R}$

7. Man bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

8. Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$$

9. Die drei Freunde Tim, Tom und Jerry haben in einem ausländischen Spirituosen- und Tabakgeschäft eingekauft. Beim Zoll stellen sie fest, dass sie keine Kassenzettel erhalten haben; allerdings wissen sie noch die Endsummen:
Jerry kaufte 1 Flasche Tequilla, 3 Flaschen Wein und 30 Päckchen Zigaretten und bezahlte 90 Dollar.
Tom kaufte keinen Tequilla, 2 Flaschen Wein und 20 Päckchen Zigaretten und bezahlte 50 Dollar
und Tim kaufte jeweils 1 Flasche Tequilla und Wein sowie 10 Päckchen Zigaretten und bezahlte 40 Dollar .
Wieviel Dollar kosten die Artikel einzeln jeweils höchstens?

10. Ein Hochhaus-Fallschirmspringer (Base Jumper) springt von einem 21 Meter hohen Hochhaus in nordöstliche Richtung. Seine Flugbahn beschreibt eine Gerade. Seine Geschwindigkeit ist konstant; pro Sekunde fliegt der Fallschirmspringer $\sqrt{2}$ Meter in Richtung Nordost und 2 Meter in die Tiefe.
    Das Podest, auf dem der Fallschirmspringer landen will, hat einen Radius von 3 Metern und ist 1 Meter hoch. Die Mitte des Podests befindet sich von der Hausecke, von der der Artist springt, gesehen, 11 Meter in östlicher und 10 Meter in nördlicher Richtung.

    - Führen Sie ein geeignetes kartesisches Koordinatensytem ein.
    - Bestimmen Sie darin die Koordinaten der wesentlichen Punkte:
        - Absprungstelle
        - Mittelpunkt des Podests und
        - Landepunkt auf dem Podest.
    - Welche Strecke legt der Artist im Flug zurück?
    - Wie lange dauert der Flug?
    - Wie groß ist die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers?