Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II 16.3.2009

1.) Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 1 \\ -2x & + & 2y & = & -4 \end{array}$$

(a) mit dem Gauß-Verfahren

(b) mit der Cramerschen Regel

(c) mit Matrixinversion

2.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 8 & b \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Werte a und b derart, dass A die Eigenwerte -1 und 5 hat. Wie lautet der Eigenvektor zum Eigenwert -1?

3.) Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von α:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & \alpha & 7 \end{pmatrix}$$

4.) Für welche Werte von a und b sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 7 \\ b \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

5.) In welcher Höhe h muss ein Ball abgeworfen werden, so dass er nach einem Aufprall auf dem Boden in genau $\sqrt{20}$m ein Ziel in der Höhe 5m trifft. Dabei sollen die horizontalen Koordinaten des Abwurf- und des Zielpunktes genau 5m auseinander liegen.
Die Erdanziehung soll hier vernachlässigt werden.

h

$\sqrt{20}$ m

4 m

5 m

6.) Zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}^2$, wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$, erfüllen die Eigenschaft $x \sim y$, falls gilt:

$$x_1 + y_2 = x_2 + y_1.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

7.) Die Kugel K hat den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Radius 5. Zeigen Sie, dass die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf der Kugel liegen. Berechnen Sie den Cosinus des Winkel, den die Tangentialebenen der Kugel in den Punkten A und B einschließen.

8.) Die Matrix A_n sei definiert als:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass

$$det(A_n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} b_i c_i$$

für alle $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

9.) Eine Katze startet ihre nächtliche Erkundungstour im Ursprung eines Koordinatensystems und läuft zunächst 200 m in Richtung (3, 4). Dann trifft sie senkrecht auf eine Hecke. Eine Maus sitzt hinter der Hecke auf Position (140, 170), wobei die Koordinaten in m angegeben sind. Bis auf welche Entfernung kann sich die Katze im Schutz der Hecke, d.h. durch Bewegung entlang der Hecke, an die Maus heranschleichen?

10.) Bestimmen Sie die Menge der Vektoren, die sich als Kreuzprodukt

$$\vec{v} \times \left(\vec{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ergeben, wobei die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

beliebige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ mit der mittleren Komponente 0 sind. Um welche geometrische Figur handelt es sich?