Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 19.3.2010

1.) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4t \\ 1 & 2 & 2 & 4t \\ t & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

und geben Sie an, für welche Werte von t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

2.) Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2_{\geq} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ e^{x+y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung nicht linear ist.

(b) Treffen Sie begründete Aussagen über die Injektivität und die Surjektivität von f. Ist die Abbildung invertierbar?

3.) Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a den Kern, die Dimension des Kerns, sowie den Rang der Matrix.

(b) Geben Sie ebenfalls in Abhängigkeit von a den Bildraum der Matrix an.

5.) Ein Flughafenbetreiber möchte eine neue Start- und Landebahn bauen. Damit Flugzeuge dort starten und landen dürfen, muss ein Abstand von 10 der Flugbahn der Flugzeuge von dem in der Nähe liegenden Wohngebiet eingehalten werden. Das Wohngebiet liegt bei den Koordinaten $A = (1, 1, 0)^T$. Die Flugzeuge starten am Punkt $B = (11, 21, 0)^T$ und fliegen in Richtung $\vec{r} = (-1, -2, 5)^T$. Zeigen Sie durch Abschätzung, dass der Abstand der Flugbahn vom Wohngebiet groß genug ist und der Flughafenbetreiber die Start- und Landebahn genehmigt bekommt.

6.) Sei V ein Vektorraum und seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V mit $V = U_1 \cup U_2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

(ii) Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$.

(iii) Die Vektoren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ sind stets linear unabhängig.

Beweisen Sie diese Aussage durch die folgenden Teilbeweise:

(a) Zeigen Sie (i)$\Rightarrow$(ii) durch Annahme zweier verschiedener Darstellungen.

(b) Zeigen Sie (ii)$\Rightarrow$(iii).

(c) Zeigen Sie (iii)$\Rightarrow$(i).

7.) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}^n$ und $a, b \in V$. Zeigen Sie, indem Sie **alle** Axiome überprüfen, dass durch

$$\langle a, b\rangle = \delta_a(b) := \begin{cases} 1 & \text{für } a = b \\ 0 & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

kein Skalarprodukt auf V definiert ist.

8.) Gegeben sei die Ebene

$$E_2 : \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

in Parameterdarstellung.

(a) Stellen Sie E_2 in Hesse-Normalform dar.

(b) Bestimmen Sie die Schnittgerade g zwischen E_2 und

$$E_1 : \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

9.) In einer gering bevölkerten Gegend stehen vier Häuser an den Positionen $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

(a) Eine Straßenbaugesellschaft möchte eine gerade Straße so bauen, dass der Abstand von den Häusern zur Straße insgesamt minimal wird. Die Straße kann in der Form $y = ax + b$ dargestellt werden. Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = y$ auf, dass dieses Ausgleichsproblem beschreibt.

(b) Lösen Sie das Minimierungsproblem

$$||A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - y|| \to min$$

mit der Methode der kleinsten Quadrate und geben Sie an, ob diese ideale Straße direkt durch eines der Häuser führt.

10.) (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 3\end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie die Korrektheit Ihres Ergebnisses.