Klausur zur Linearen Algebra 23.09.2011

1.) Die drei Skifahrer A, B und C an den Positionen

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

fahren Ski auf einer ebenen Piste. A fährt in Richtung $(-3, 0, -1)^T$ den Berg hinab, während B in Richtung $(3, 4, -1)$ fährt. Dabei prallen die beiden unglücklicherweise zusammen.

(a) Zeigen Sie, dass A und B auch bei der Abfahrt auf der Piste bleiben und ein Snowboardfahrer D, der in Richtung $(1, 1, -1)^T$ talwärts fährt, auf einer anderen Piste unterwegs sein muss.

(b) Welche Koordinaten hat der Punkt, an dem der Zusammenprall zwischen A und B stattfindet?

(c) Berechnen Sie den Cosinus des Winkel, unter dem A und B zusammenprallen.

2.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ die Abbildung

$$f(x_1, x_2, x_3) = a \cdot x_2 + (b-1) \cdot x_3$$

(a) Welche Werte kann der Rang der Abbildungsmatrix zu f annehmen? Bestimmen Sie für beide Fälle die Menge der Paare (a, b) mit dem jeweiligen Rang.

(b) Bestimmen Sie für beide Fälle jeweils den Kern und das Bild der Abbildung f.

(c) Sei nun $g : V \to V$ eine lineare Abbildung <u>innerhalb</u> eines beliebigen Vektorraum V. Gilt die allgemeine Aussage:

$$\mathrm{Kern}(g) \quad \cup \quad \mathrm{Bild}(g) \quad = \quad V \quad ?$$

Beweisen Sie Ihre Aussage.

3.) Gegeben sei der euklidische Raum des $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2.$$

(a) Beweisen Sie, dass das gegebene Skalarprodukt positiv definit ist, d.h. dass

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

gilt.

(b) Über welche Eigenschaften neben der positiven Definitheit ist ein Skalarprodukt definiert? Der Nachweis der Eigenschaften für das hier gegebene Skalarprodukt ist <u>nicht</u> erforderlich.

(c) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. des gegebenen Skalarproduktes. Verwenden Sie dazu die Standardnorm bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

4.) Die stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ bilden bekanntlich einen Vektorraum $C[0, 1]$ über den reellen Zahlen. Seien nun folgende Vektoren aus diesem Vektorraum gegeben:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x + 1 \\ f_2(x) &= x - 2 \\ f_3(x) &= x^2 - 1 \\ f_4(x) &= e^x \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis des Unterraums P_2 der Polynome vom Grad kleinergleich 2 bilden.

(b) Untersuchen Sie die drei Funktionen $\{f_1, f_2, f_4\}$ auf Lineare Unabhängigkeit.

(c) Welche Dimension hat der Vektorraum $C[0, 1]$? Bilden die Funktionen $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ somit eine Basis von $C[0, 1]$?

5.) Die Determinante der folgenden Matrix A_1 ist:

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = d.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $\det(A_1)$ die Determinaten der folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $c, d \in \mathbb{R}$:

(a) $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} & c \cdot a_{33} & c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(b) $A_3 = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + a_{41} & a_{12} + a_{42} & a_{13} + a_{43} & a_{14} + a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(c) $A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(d) $A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} + c \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + c \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + c \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + c \cdot a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(e) $A_6 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} + c \cdot a_{31} & a_{12} + c \cdot a_{32} & a_{13} + c \cdot a_{33} & a_{14} + c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(f) $A_7 = (A_1)^{-1}$

6.) Welche Bedingung für a, b und c muss erfüllt sein, damit das folgende Gleichungssystem (mindestens) eine Lösung hat?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{aligned}$$

Kann das System genau eine Lösung haben?
Geben Sie auch die Lösungen des Gleichungssystems an.

7.) Es seien S und T die folgenden Teilräume des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \,\middle|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}, \\ T &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 2x_4 \right\}. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Dimension sowie eine Basis von S bzw. T an.

(b) Geben Sie die Dimension sowie eine Basis von $S \cap T$ an.

8.) Betrachten Sie den vierdimensionalen Vektorraum P_3 aller reellen Polynome vom Grad kleinergleich 3 und die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} &D\colon P_3 \to P_3, \\ &D(p) = p''. \end{aligned}$$

(a) Finden Sie den Kern und das Bild von D.

(b) Ist D injektiv bzw. surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.