Aufgabe 1

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ auf.
Berechnen Sie eine Orthonormalbasis, die den gleichen Raum aufspannt.

Aufgabe 2

Es sei

$$A_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

eine von $t \in \mathbb{R}$ abhängige Menge dreier Vektoren.

(a) Für welche t bildet A_t eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis A_3.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Dimension der Linearen Hülle von

$$A_2 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} \right\}$$

.

Aufgabe 3

Gegeben sind die beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.
Bestimmen Sie die Matrix A, die diese Eigenvektoren und Eigenwerte besitzt.

Hinweis: Eine Möglichkeit zur Lösung ist das Aufstellen eines linearen Gleichungssstems mit den Koeffizienten der gesuchten Matrix als Unbekannte.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgenden reellen Funktionen:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x^{13} - x^{11} + 2 \\ g_2(x) &= -x^{13} + 1 \\ g_3(x) &= 2 \cdot x^{13} + x^{11} \\ g_4(x) &= e^x \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{g_1, g_2, g_3\}$ linear unabhängig sind.

(b) Für welchen Vektorraum bilden $\{g_1, g_2, g_3\}$ eine Basis?

(c) Untersuchen Sie $\{g_2, g_3, g_4\}$ auf lineare Unabhängikeit.

Aufgabe 5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \cdot b \\ 0 & b+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $M_k = \{(a,b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, rg(A) = k\}$ für $k = 0, 1, 2$.
Bestimmen Sie jeweils die Menge der Parameter (a, b), für die der Rang von A gleich k ist, also M_0, M_1, M_2.

(b) Bestimmen Sie für die drei Fälle M_0, M_1, M_2 jeweils den Kern und das Bild der Abbildung A.

Aufgabe 6

(a) Geben Sie die allgemeine Definition für ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ an.

(b) Handelt es sich im folgenden Fall um ein Skalarprodukt? (Begründung!)

$$V = \mathbb{R}^4, \langle v, w \rangle := v^T A w$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v, w \in V$$

Aufgabe 7

Gegeben ist $c, t \in \mathbb{R}$ und die folgende Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

- $det(A_t)$
- $det(A_t^5)$
- $det(c \cdot A_t)$

Hinweis: Für beliebige Matrizen A und B und deren diagonale Zusammensetzung mit Hilfe von Nullmatrizen, gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B).$$

(b) Bestimmen Sie außerdem

- $det(A_t^{-1})$
- $det((A_t^{-1})^5)$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Ausdrücke definiert?

Aufgabe 8

Am Himmel wird ein unbekanntes Flugobjekt beobachtet. Es scheint sich entlang der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu bewegen.

Das Ufo überquert eine Hochspannungsleitung, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ verläuft.

(a) Stellen Sie die Geradengleichung der Hochspannungsleitung auf.

(b) Berechnen Sie den Punkt auf der Flugbahn des Ufos und den Punkt auf der Geraden der Hochspannungsleitung, zwischen denen der minimale Abstand angenommen wird.

(c) Berechnen Sie den minimalen Abstand des Ufos von der Hochspannungsleitung.