Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2009/10, 06.10.2009

Prof. P. Jansen , Dipl.Math. P. Mayiopoulos

Aufgabe 1: *10 Punkte*

a) Berechnen Sie den ggT von 1962 und 990 mit dem Euklidischen Algorithmus.

b) Berechnen Sie 9^{17} modulo 7

Lösung

a)
$$\left.\begin{array}{rcl} 1962 & = & 1 \cdot 990 + 972 \\ 990 & = & 1 \cdot 972 + 18 \\ 972 & = & 54 \cdot 18 + 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ggT(1962, 990) = 18$$

b)
$$\begin{aligned} 9^{17} \bmod 7 &= 2^{17} \bmod 7 = (2^3)^5 \cdot 2^2 \bmod 7 = 8^5 \cdot 4 \bmod 7 \\ &= 1^5 \cdot 4 \bmod 7 = 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *10 Punkte*

Gegeben sei die Menge M= $\{-1, 0, 1\}$

a) Geben Sie die Potenzmenge P(M) von M an.

b) Geben Sie das Kartesische Produkt M×M an.

c) Wieviele Elemente haben P(M) und M×M in Abhängigkeit von |M|?

Lösung

a) $P(M) = \Big\{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}\Big\}$

b) $$\begin{aligned} M \times M &= \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\} \\ &= \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1)\} \end{aligned}$$

c) $|P(M)| = 2^3 = 8$

$|M \times M| = |M| \cdot |M| = 3 \cdot 3 = 9$

Aufgabe 3: *10 Punkte*

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1}$$

Lösung

Induktions-Anfang :

Für ein $n = 0$ gilt : $\dfrac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} = \sqrt{0+1}$ (wahr)

Induktions-Annahme :

Für ein $n \geq 0$ gelte $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1}$

Induktions-Behauptung :

Für $(n+1)$ gilt dann : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+2}$

Induktions-Beweis :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

$$= \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \stackrel{?}{=} \sqrt{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}) + 1 \stackrel{?}{=} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}) \Leftrightarrow$$

$$n+1+\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)} + 1 \stackrel{?}{=} \sqrt{(n+2)\cdot(n+1)} + n + 2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(n+1)(n+2)} = \sqrt{(n+2)(n+1)}$$

Aufgabe 4: *10 Punkte*

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung :

$$\frac{|x+1|}{x^2+1} > 1$$

Lösung

$\frac{|x+1|}{x^2+1} > 1 \;\Leftrightarrow\; |x+1| > x^2+1$

a) $x \in \{-\infty, -1\}$

$-x-1 > x^2+1 \;\Rightarrow\; 0 > x^2+x+2$

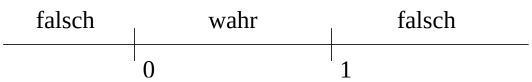
$x^2+x+2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \;\Rightarrow$

Das Polynom$P(x) = x^2+x+2$ hat keine reelle Nullstellen und

$P(0) = 2 > 0 \;\Rightarrow\; P(x) > 0 \quad \forall x \;\Rightarrow\; L_1 = \emptyset$

b) $x \in [-1, \infty)$

$x+1 > x^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 0 > x(x-1)$



$L_2 = [-1, \infty) \cap (0, 1) = (0, 1)$

c) $L = L_1 \cup L_2 = (0, 1)$

Aufgabe 5: *10 Punkte*

a) Stellen Sie ein Polynom (ganz rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten auf, das i sowie 1 und 2 als Nullstelle besitzt.

b) Werten Sie dieses Polynom (von Teil a) an der Stelle $x_0 = -1$ mit dem Hornerschema aus. Was ergibt sich bei der Division durch $(x+1)$?

Lösung

a)
$$\begin{array}{rl} P(z) & = (z-i)(z+i)(z-1)(z-2) \\ & = (z^2+1)(z^2-3z+2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} = & z^4 & - & 3z^3 & + & 2z^2 & & & & \\ & & & & + & z^2 & - & 3z & + & 2 \\ \hline = & z^4 & - & 3z^2 & + & 3z^2 & - & 3z & + & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ \hline -1 & & -1 & 4 & -7 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & 7 & -10 & 12 \end{array}$$

Es gilt : $P(-1) = 12$

$z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2 = (z+1)(z^3 - 4z^2 + 7z - 10) + 12$

Aufgabe 6: *10 Punkte*

a) Verneinen Sie die logische Aussage :

$$\forall q \in \mathbb{Q} \;\; \exists\, z \in \mathbb{Z} : |q - z| < 1$$

b) Gegeben sei die folgende if-Abfrage in Java :

```
if(n<18 & (n>=18|k==17)){...
```

Schreiben Sie den Ausdruck in der if-Abfrage mit Boolschen Operatoren als logischer Ausdruck und vereinfachen Sie ihn. Dazu verwenden Sie als logischen Aussagen $n < 18$ und $k = 17$ (die dann wahr oder falsch sein können).

Lösung

a) Aussage : $\forall q \in \mathbb{Q} \quad \exists\, z \in \mathbb{Z} \quad : |q - z| < 1$

Negation : $\exists q \in \mathbb{Q} \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad : |q - z| \geq 1$

b) Mit $x := n < 18$ und $y := (k == 17)$ gilt:

Logische Aussage : $x \wedge (\overline{x} \vee y)$

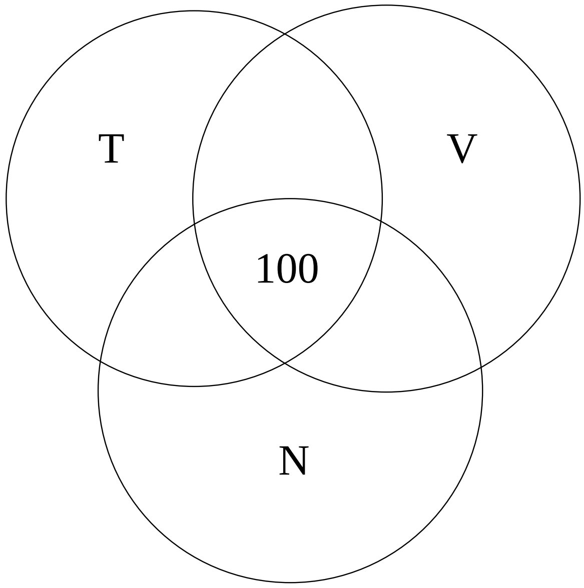
$$= (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y)$$

$$= 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$$

Aufgabe 7: *10 Punkte*

In einer Stadt gibt es drei Tageszeitungen : den konservativen Tagesanzeiger, die liberalen Nachrichten und die linke Volkszeitung. Der Tagesanzeiger hat 2000 Abonenten, 1000 Haushalte beziehen die Volkszeitung und die Nachrichten lesen 500 Personen. Es gibt niemanden der zwei Zeitungen bezieht. 100 politisch Interessierte beziehen aber sogar alle 3 Zeitungen. Wieviele Personen lesen in der Stadt Zeitung? Fertigen Sie erstens ein Mengendiagramm und argumentieren Sie mit den Regeln für die Mächtigkeit (Kardinalzahl).

Lösung



Mengendiagramm

Mit T :=Tagesanzeiger

V :=Volkszeitung

N :=Nachrichten

gilt:

$$|T| = 2000\ , \quad |V| = 1000\ , \quad |N| = 500$$

$$|T \cap V \cap N| = 100\ , \quad |T \cap V| = 100\ , \quad |T \cap N| = 100\ , \quad |V \cap N| = 100$$

$$\begin{aligned} |T \cup V \cup N| &= |T| + |V| + |N| - |T \cap V| - |T \cap N| - |V \cap N| + |T \cap V \cap N| \\ &= 2000 + 1000 + 500 - 100 - 100 - 100 + 100 \\ &= 3300 \end{aligned}$$

Aufgabe 8: *10 Punkte*

a) Geben Sie die Definition einer Äquivalenzrelation an.

b) Zeigen Sie das "x steht in Relation zu y" genau dann,
wenn $x \cdot y > 0$, $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation ist.
Was sind die Äquivalenzklassen?

Lösung

a) Eine Relation R heißt eine Äquivalenzrelation, wenn Sie

1. Reflexiv : $(x, x) \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

2. Symmetrisch : $(x, y) \in \mathbb{R} \Rightarrow (y, x) \in R \quad \forall\, (x, y) \in R$

3.Transitiv : $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R \quad \forall\, (x, y), (y, z) \in R$

ist.

b) 1. Die Relation ist reflexiv, denn es gilt : $x \cdot x = x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

2. Die Relation ist symmetrisch, denn es gilt :
$x \cdot y > 0 \quad \Rightarrow \quad y \cdot x > 0 \quad \forall x \cdot y > 0$,weil $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

3. Die Relation ist transitiv, denn es gilt :
$x \cdot y > 0 \wedge y \cdot z > 0 \Rightarrow xy^2 z > 0 \,|\, : y^2 > 0 \Rightarrow xz > 0$

Alle Elemente in einer Klasse stehen in Relation zueinander. Wählt man eine positive Zahl $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so gilt für alle positives $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad x \cdot y > 0$, d.h. alle positive ganze Zahlen also die natürlichen Zahlen bilden eine Klasse. Die anderen Klasse bilden alle negative ganz Zahlen.

Aufgabe 9: *10 Punkte*

Ein Gemüsehändler will ein Angebot machen:
6 beliebige Früchte aus 3 Sorten (Apfel,Birne,Pfirsich) zum Preis von 2 Euro wählen. Aus hygenischen Gründen möchte er nicht, dass die Kunden das Obst anfassen, vielmehr möchte er alle möglichen Zusammenstellungen in Tüten verpackt vorbereiten. Wieviele sind das? Geben Sie ein Urnenmodell an.

Lösung

Aus 3 Sorten Früchte werden 6 kombiniert. Das ist eine Kombination mit Wiederholung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Es gilt die Formel

$$Kom\_mW(n,k) = \binom{n+k+1}{k} = \binom{3+6+1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$$

Urnenmodell

In der Urne liegen beliebig viele Früchte. Es wird 6 mal gezogen um eine Kombination zusammenzustellen.

Aufgabe 10: *10 Punkte*

Für welche komplexen Zahlen gilt :

a) $z = |z|$

b) $z = \overline{z}$

c) $z^2 = \overline{z}^2$

d) $z = -\overline{z}$

Lösung

a) $z = |z| \;\Leftrightarrow\; x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; x = +\sqrt{x^2} \;\Rightarrow$
Die zahlen $z = x$, $x \in \mathbb{R}_+$ erfüllen die Gleichung

b) $z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad x + iy = x - iy \quad \Leftrightarrow \quad iy = -iy \quad \Leftrightarrow \quad 2iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$
Die Zahl $z = x$, $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung (x-Achse)

c) $z^2 = \overline{z}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + iy)^2 = (x - iy)^2 \;\Rightarrow$
$x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 - y^2 - 2ixy \quad \Leftrightarrow \quad 4ixy = 0 \quad \Rightarrow$
Die Menge $M = \{z = x + iy | z = x \text{ oder } z = y \;,\; z, y \in \mathbb{R}\}$,
das ist die Menge alle Punkte auf der x- oder y-Achse

d) $z = -\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad x + iy = -x + iy \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow$
Die Zahlen $z = 0 + iy$ erfüllt die Gleichung (y-Achse)