Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06   04.10.2005

Aufgabe 1: *3 Punkte*

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$z = \frac{\frac{5}{2} + \frac{i}{2}}{2 + \frac{1}{1-i}}$$

indem Sie ihn auf die Form $a + ib$ bringen.

Lösung:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5+i}{\frac{2-2i+1}{1-i}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(5+i)(1-i)}{3-2i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5-5i+i-i^2}{3-2i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5-4i+1}{3-2i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6-4i}{3-2i} = \frac{3-2i}{3-2i} = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *3 Punkte*

Unter Verwendung der Formel $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ beweisen Sie (ohne vollständige Induktion):

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) &= \sum_{j=1}^{n}(3j-2) \\
&= 3\sum_{j=1}^{n} j - 2\sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= \frac{3n(n+1)}{2} - 2n \\
&= \frac{n}{2}\Big(3(n+1) - 4\Big) = \frac{n}{2}(3n-1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *3 Punkte*

Lösen Sie die Ungleichung

$$1 + |x + 3| < |2x - 3|$$

Geben Sie die Lösungsmenge an und skizzieren Sie diese auf der Zahlengerade.

Lösung:

Fallunterscheidung:

a) $x \in (-\infty, -3) \implies$

$1 - x - 3 < -2x + 3 \implies \quad x - 2 < 3 \implies x < 5$

$L_1 = (-\infty, 5) \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$

b) $x \in [-3, \frac{3}{2}) \implies$

$1 + x + 3 < -2x + 3 \implies$

$3x + 4 < 3 \implies \quad 3x < -1 \implies \quad x < -\frac{1}{3}$

$L_2 = (-\infty, -\frac{1}{3}) \cap [-3, \frac{3}{2}) = [-3, -\frac{1}{3})$

c) $x \in [\frac{3}{2}, \infty) \implies$

$1 + x + 3 < 2x - 3 \implies \quad 7 < x$

$L_3 = (7, \infty) \cap [\frac{3}{2}, \infty) = (7, \infty)$

Aus a) , b) und c) folgt:

$$\begin{aligned} L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 &= (-\infty, -3) \cup [-3, -\tfrac{1}{3}) \cup (7, \infty) \\ &= (-\infty, -\tfrac{1}{3}) \cup (7, \infty) \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *3 Punkte*

Sei $M = \{a, b, c\}$ und R sei folgende Relation auf M :

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (b, c)\}$.

a) Begründen Sie, warum R weder reflexiv, symmetrisch noch transitiv ist.

b) Ergänzen Sie die Menge R so durch weitere Paare, dass die neue Relation R' eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Lösung:

a) 1. Die Relation ist nicht reflexiv, weil (b, b) und (c, c) nicht zur R gehört

2. Die Relation ist nicht symmetrisch, weil (a, b) zur R aber (b, a) nicht zur R gehört

3. Die Relation ist nicht transitiv, weil (b, c) und (c, a) zur R gehören, nicht aber (b, a)

b) $R' = R \cup \{(b, b), (c, c), (b, a), (c, b)\}$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 04.10.2005

Aufgabe 5: *3 Punkte*

a) Bei einer Tanzveranstaltung seien 10 Frauen und 10 Männer. Es ist Damenwahl. Man berechne wie viele Paarbildungen (Frau+Mann) denkbar sind.

b) Ein Fußbalklub hat 2 Torwarte und 12 andere Spiel. Wie viele verschiedene Fußballmanschaften zu 11 Spieler kann der Klub aufstellen?

Hinweis: Für jedes Torwart kann man die restlichen 10 Spieler aus den 12 auswählen

Lösung:

a)
$$\left.\begin{array}{c}\text{Die 1. Frau hat 10 Möglichkeiten}\\ \text{Die 2. Frau hat 9 Möglichkeiten}\\ \vdots\\ \text{Die 1. Frau hat 10 Möglichkeiten}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad 10! \text{ Paare}$$

b) Für jeden Torwart hat man

$$\binom{12}{10} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 11 \cdot 6 = 66 \ \text{ Speielerkombination.}$$

Für 2 Torwarte hat man $2 \cdot 66 = 132$ Manschaften.

Aufgabe 6: *3 Punkte*

Beweisen Sie die Tautologie der Importation und der Exportation

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

a) durch Aufstellen einer Wahrheitstafel,

b) mittels logischer Umformungen.

Lösung:

a)

A	B	C	B $\Rightarrow$ C	A $\Rightarrow$ (B $\Rightarrow$ C)	A $\cap$ B	A $\cap$ B $\Rightarrow$ C
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1
				$\Uparrow$		$\Uparrow$

b) Es gilt $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$

$$\begin{aligned} A \Rightarrow (B \Rightarrow C) &= A \Rightarrow (\overline{B} \vee C) = \overline{A} \vee (\overline{B} \vee C) \\ &= (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee C = (\overline{A \wedge B}) \vee C = (A \wedge B) \Rightarrow C \end{aligned}$$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 04.10.2005

Aufgabe 7: *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{-1, -i, 1, i\}$ mit der üblichen Multiplikation eine kommutative Gruppe bildet.

(Hinweis : i bezeichne hier die imaginäre Einheit)

Lösung:

Es gilt: G2-Assoziativgesetz und G5-Kommutativgesetz, weil diese für alle Komplexe Zahlen gelten. Ferner gilt:

G1) Für alle $z_1, z_2 \in M$ ist $z_1 \cdot z_2$ definiert und ein Element von M. Es gilt nämlich:

$(-1)^2 = 1 \in M$, $(-1)\cdot(-i) = i \in M$, $(-1)\cdot 1 = -1 \in M$, $(-1)\cdot i = -i \in M$,

$(-i)^2 = 1 \in M$, $(-i) \cdot 1 = -i \in M$, $(-i) \cdot i = -i^2 = 1 \in M$,

$1^2 = 1 \in M$, $1 \cdot i = i \in M$, $i^2 = -1 \in M$

G2) Das neutrale Element ist die 1

$(-1) \cdot 1 = -1$, $(-i) \cdot 1 = -i$, $1 \cdot 1 = 1$, $i \cdot 1 = i$

G4) Jedes Element $z \in M$ besitzt ein Inverses-Element, das wieder in der Menge M liegt. Es ist nämlich:

$(-1) \cdot (-1) = 1$, $(-i) \cdot i = 1$, $1 \cdot 1 = 1$, $i \cdot (-i) = 1$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 04.10.2005

Aufgabe 8: *3 Punkte*

Gegeben seien die Mengen $M = \{1, 2, 5, 6\}$ und $N = \{2, 6\}$

a) Geben Sie die Potenzmenge $P(M)$ von M an

b) Berechnen Sie die Menge $(M \backslash N) \times N$

Lösung:

a) $$P(M) = \Big\{\emptyset\, , \{1\}\, , \{2\}\, , \{5\}\, , \{6\}\, , \{1,2\}\, , \{1,5\}\, , \{1,6\}\, , \{2,5\}\, , \{2,6\}\, , \{5,6\}\, , \{1,2,5\}\, , \{1,5,6\}, \{2,5,6\}\, , \{1,2,6\}, \{1,2,5,6\}\Big\}$$

b) $M \backslash N = \{1, 5\}$

$$(M \backslash N) \times N = \{1, 5\} \times \{2, 6\} = \Big\{(1,2)\, , (1,6)\, , (5,2)\, , (5,6)\Big\}$$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 04.10.2005

Aufgabe 9: *3 Punkte*

Man zeige durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \;\leq\; \frac{n^3}{3}\,, \quad n \geq 2.$$

Lösung:

Induktions-Anfang:

Für $n = 2$ gilt : $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 < \frac{2^3}{2} = \frac{8}{3}$

Induktions-Annahme:

Für n gelte : $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \leq \frac{n^3}{3}$

Induktions-Behauptung :

Für $(n+1)$ gilt dann : $\sum_{k=1}^{n} k^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$

Induktions-Beweis :

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 \quad \leq \quad & \frac{n^3}{3} + n^2 \overset{?}{\leq} \frac{(n+1)^3}{3} \iff \\ & n^3 + 3n^2 \overset{?}{\leq} (n+1)^3 \iff \\ & n^3 + 3n^2 \leq n^3 + 3n^3 23n + 1 \end{aligned}$$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 04.10.2005

Aufgabe 10: *3 Punkte*

Man berechne alle Nullstellen der Gleichung $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Lösung:

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2i$$